目　录

第1章 复 数

1 复数的代数学

实数和复数遵从同样的算术基本律. 在学习复变函数论的开始,我们要着重应用并进一步充实这一相似性.

1.1 算术运算

读者从初等代数中已经知道虚数单位 i 具有性质 $i^2=-1$. 如将这一虚数单位与两个实数 α、β 通过加法与乘法结合起来,则得一复数 $\alpha+i\beta$. α 及 β 分别称为这一复数的实部与虚部. 若 $\alpha=0$,则称这一数为纯虚数; 若 $\beta=0$, 它当然是实数. 零是同时可作为实数与纯虚数的唯一数. 两复数相等, 必须而且只须它们具有相等的实部与相等的虚部.

复数对加法与乘法自封. 假定我们将算术的普通规则应用于复数,当然就有

$$(\alpha+i\beta)+(\gamma+i\delta)=(\alpha+\gamma)+i(\beta+\delta) \tag{1}$$

及

$$(\alpha+i\beta)(\gamma+i\delta)=(\alpha\gamma-\beta\delta)+i(\alpha\delta+\beta\gamma). \tag{2}$$

在第二个恒等式中,我们使用了关系式 $i^2=-1$.

除法的可行并不那末明显. 我们要来证明 $(\alpha+i\beta)/(\gamma+i\delta)$ 仍是一复数,此处 $\gamma+i\delta\neq 0$. 以 $x+iy$ 表示所求的商,则必有

$$\alpha+i\beta=(\gamma+i\delta)(x+iy).$$

根据(2),上式可写成

$$\alpha+i\beta=(\gamma x-\delta y)+i(\delta x+\gamma y),$$

从而得到下列两方程;

$$\alpha=\gamma x-\delta y,$$
$$\beta=\delta x+\gamma y.$$

由于我们已知 $\gamma^2+\delta^2\neq 0$,故上面的线性方程组有唯一解:

$$x=\frac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\gamma^2+\delta^2},\quad y=\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2+\delta^2}.$$

这样,就得到结果

$$\frac{\alpha+i\beta}{\gamma+i\delta}=\frac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\gamma^2+\delta^2}+i\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2+\delta^2}. \tag{3}$$

商的存在既经证明之后,它的值就可用较简单的方法求得.以 $\gamma-i\delta$ 乘分子分母,立即可得

$$\frac{\alpha+i\beta}{\gamma+i\delta}=\frac{(\alpha+i\beta)(\gamma-i\delta)}{(\gamma+i\delta)(\gamma-i\delta)}=\frac{(\alpha\gamma+\beta\delta)+i(\beta\gamma-\alpha\delta)}{\gamma^2+\delta^2}.$$

作为一个特例,一个不等于零的复数的倒数为

$$\frac{1}{\alpha+i\beta}=\frac{\alpha-i\beta}{\alpha^2+\beta^2}.$$

注意:i^n 只有四个可能的值,即 $1, i, -1, -i$. 它们相当于指数 n 的值 $0, 1, 2, 3$, 这是以 4 除 n 后可能得到的余数.

习　　题

1. 求下列各数的值:

$$(1+2i)^3,\quad \frac{5}{-3-4i},\quad \left(\frac{2+i}{3-2i}\right)^2,\quad (1+i)^n+(1-i)^n.$$

2. 设 $z=x+iy$(x、y 实数),求下列各数的实部和虚部:

$$z^4,\quad \frac{1}{z},\quad \frac{z-1}{z+1},\quad \frac{1}{z^2}.$$

3. 证明 $\left(\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}\right)^3=1$ 及 $\left(\frac{\pm 1\pm i\sqrt{3}}{2}\right)^6=1$

不论符号如何搭配均成立.

1.2 平方根

现在我们来证明一个复数的平方根可以明显地求得. 设所给复数为 $\alpha+i\beta$,我们来求复数 $x+iy$,它满足关系

$$(x+iy)^2=\alpha+i\beta.$$

这一关系等价于下列方程组：

$$\begin{aligned} x^2-y^2&=\alpha, \\ 2xy&=\beta. \end{aligned} \tag{4}$$

由上两式得

$$(x^2+y^2)^2=(x^2-y^2)^2+4x^2y^2=\alpha^2+\beta^2.$$

因而必有 $$x^2+y^2=\sqrt{\alpha^2+\beta^2},$$

式中的平方根为正或零．将这一式与(4)的第一式求解，得

$$\begin{aligned} x^2&=\frac{1}{2}(\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}), \\ y^2&=\frac{1}{2}(-\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}). \end{aligned} \tag{5}$$

我们看到这些量不论 α 的符号如何总是正的或零．

从方程 (5) 一般可得两个相反符号的 x 值和两个相反符号的 y 值．但这些值不能任意组合，因为(4)中的第二式并不是(5)的结果．因此必须谨慎地选择 x 与 y，使其积与 β 同符号．这样就得到一般解

$$\sqrt{\alpha+i\beta}=\pm\left(\sqrt{\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}}+i\frac{\beta}{|\beta|}\sqrt{\frac{-\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}}\right), \tag{6}$$

只要 $\beta\neq0$．对于 $\beta=0$，当 $\alpha\geqslant0$ 时，其值为 $\pm\sqrt{\alpha}$，当 $\alpha<0$ 时，为 $\pm i\sqrt{-\alpha}$．应当理解，正数的所有平方根均取正号．

上面证明了任一复数的平方根是存在的，且具有两个相反的值．这两个值仅当 $\alpha+i\beta=0$ 时相等．如 $\beta=0$，而 $\alpha\geqslant0$，则平方根值为实数，如 $\beta=0$ 而 $\alpha\leqslant0$，则为纯虚数．换句话说，除了零以外，只有正数才有实的平方根，只有负数才有纯虚数的平方根．

由于两个平方根一般都是复数，所以一个复数的平方根就不可能分出正负来．我们当然可以用 (6) 式中上面的符号与下面的符号来进行区分，但这种区分是不自然的，因而必须避免．正确的方法是将两个平方根按对称的方式处理．

习　题

1. 计算$\sqrt{i}$，$\sqrt{-i}$，$\sqrt{1+i}$，$\sqrt{\frac{1-i\sqrt{3}}{2}}$.

2. 求$\sqrt[4]{-1}$的四个值.

3. 计算$\sqrt[4]{i}$及$\sqrt[4]{-i}$.

4. 解出二次方程

$$z^2+(\alpha+i\beta)z+\gamma+i\delta=0.$$

1.3 复数体的存在

到目前为止，我们对复数的讨论是完全不严密的. 还没有探究到当算术中一切规则保持有效时，方程$x^2+1=0$的解所从属的数系本身存在的问题.

我们先来回想一下实数系**R**的一些特征性质. 首先我们知道**R**是一个体(field，或域). 这意思就是说，在**R**中定义了加法运算和乘法运算，它们满足结合律、交换律及分配律. 数0及1分别是加法及乘法运算中的中性元素，意即对于所有的α有$\alpha+0=\alpha$，$\alpha\cdot 1=\alpha$. 其次，定义减法的方程$\beta+x=\alpha$恒有一个解，而定义除法的方程$\beta x=\alpha$，只要$\beta\neq 0$，也总有一个解❶.

用初等的理由就可证明中性元素以及减法与除法的结果都是唯一的. 又，每一个体是一个整环，意即，为了$\alpha\beta=0$，必须而且只须$\alpha=0$或$\beta=0$.

这些性质是一切体所共有的. 此外，实数体**R**具有一种次序关系$\alpha<\beta$(或$\beta>\alpha$). 用正实数集合$\mathbf{R}^+$就更易于定义下面的关系：$\alpha<\beta$的充要条件是$\beta-\alpha\in\mathbf{R}^+$. 集合$\mathbf{R}^+$以下列几种性质为其特征：(1) 0不属于$\mathbf{R}^+$；(2) 如果$\alpha\neq 0$，则$\alpha$或$-\alpha$属于$\mathbf{R}^+$，但不并立；(3) $\mathbf{R}^+$中任二元素之和与积仍属于$\mathbf{R}^+$. 从这些性质就可推出不等式运算的全部规则. 特别是，任一数α的平方α^2或

❶ 我们假定读者已具有基础代数学的实际知识. 虽然上面所说关于体的特征表示是完备的，但对于一个还没有粗略地熟悉这些概念的读者，显然不会有很大帮助.

者是正数，或者等于零；因此 $1=1^2$ 是一正数.

根据次序关系可知：和 1, 1+1, 1+1+1, … 互不相同. 因此，**R** 包含自然数全体，而由于它是一个体，故知它必包含有理数全体所组成的子体.

最后，**R** 满足下列的完备性条件：每一个递增而有界的实数叙列必有一极限. 设 $\alpha_1<\alpha_2<\alpha_3<\cdots<\alpha_n<\cdots$，并设存在一个实数 B，得使对于所有的 n，有 $\alpha_n<B$. 那么完备性条件就意味着存在一个数 $A=\lim\limits_{n\to\infty}\alpha$，它具有下列性质：给定任意的 $\varepsilon>0$，存在一个自然数 n_0，使得对于所有的 $n>n_0$，有不等式 $A-\varepsilon<\alpha_n<A$ 成立.

我们对于实数系的讨论是不完全的，因为我们并没有证明具有上述公设性质的一个数系 **R** 的存在和唯一性（除同构以外）❶. 读者如果还不十分明了那种用以引进实数的构作方法，可参看有关这方面的书籍.

由于 α^2+1 恒为正数，故知方程 $x^2+1=0$ 在 **R** 中无解. 现在我们假设可以找到一个体 **F**，它以 **R** 为其子体，而且在 **F** 中方程 $x^2+1=0$ 有解. 以 i 表示这方程的一个解. 则因

$$x^2+1=(x+i)(x-i),$$

故知方程 $x^2+1=0$ 在 **F** 中恰有两个解 i 及 $-i$. 令 **C** 为 **F** 的子集，由所有能表为 $\alpha+i\beta$ 的元素组成，此处 α 及 β 为实数. 这一表示式是唯一的，因为 $\alpha+i\beta=\alpha'+i\beta'$ 就意味着

$$\alpha-\alpha'=-i(\beta-\beta');$$

从而

$$(\alpha-\alpha')^2=-(\beta-\beta')^2,$$

但这只有在 $\alpha=\alpha'$, $\beta=\beta'$ 时方始可能.

子集 **C** 是 **F** 的一个子体. 事实上，除了应由读者作一些普通的验证之外，这正是我们已在 1.1 节中证明过的. 此外，子集 **C** 的构造与 **F** 无关. 因为如设 **F**′ 为另一个包含 **R** 及方程 $x^2+1=0$ 的一个根 i' 的体，则元素 $\alpha+i'\beta$ 全体组成对应的子集 **C**′. $\alpha+i\beta$

❶ 两个体的同构指的是一种一对一的对应关系，它保持和与积的对方对应. 这一词通常用以指一种对应关系，这种对应关系是一对一的，同时保持一给定联络中所认为重要的一切关系.

全体组成的子集 $\mathbf{C}$ 与 $\alpha+i'\beta$ 全体组成的子集 $\mathbf{C}'$ 成一一对应，而这一对应显然是体的同构，从此说明 $\mathbf{C}$ 与 $\mathbf{C}'$ 是同构的.

现在我们把复数全体组成的体定义为任一给定的 $\mathbf{F}$ 的子体 $\mathbf{C}$. 上面说明了体 $\mathbf{F}$ 的选择是任意的，但还没有证明这一具有所需性质的体 $\mathbf{F}$ 的存在. 为了使我们的定义具有意义，还需要来构作出体 $\mathbf{F}$，它包含 $\mathbf{R}$(或与 $\mathbf{R}$ 同构的一个子体)，而且在其中方程 $x^2+1=0$ 有一个解.

这样的一个体可以用多种方法构作起来. 最简单而且最直接的方法如下：考察形如 $\alpha+i\beta$ 的所有元素，其中 α, β 均为实数，而记号 $+$ 及 i 则纯粹是符号（$+$ 不表示加，i 不表示体的一个元素）. 这些元素全体组成一个体 $\mathbf{F}$，在 $\mathbf{F}$ 中加法与乘法是用(1)及(2)定义的(注意记号 $+$ 的两种不同意义). 特殊形式 $\alpha+i0$ 的元素全体构成一个与 $\mathbf{R}$ 同构的子体，而元素 $0+i1$ 则满足方程 $x^2+1=0$; 因为 $(0+i1)^2=-(1+i0)$. 这样，体 $\mathbf{F}$ 就具有所需的性质，而且由于

$$\alpha+i\beta=(\alpha+i0)+\beta(0+i1),$$

故知它与对应的子体 $\mathbf{C}$ 恒等. 这就证明了复数体的存在，于是可回到较简单的记法 $\alpha+i\beta$，此处 $+$ 表示 $\mathbf{C}$ 中的加法，而 i 为方程 $x^2+1=0$ 的一个根.

习　题

(供复习代数的读者练习)

1. 证明所有形如 $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ -\beta & \alpha\end{pmatrix}$ 的矩阵经过用矩阵加法与矩阵乘法组合起来以后所成的集合与复数体同构.

2. 证明复数系可以设想为用不可约多项式 x^2+1 对于所有实系数多项式分类所得到的体.

1.4　共轭，绝对值

一个复数，或者可用单一个字母 a 表示，此处 a 为体 $\mathbf{C}$ 的一

个元素；或者可表为 $\alpha+i\beta$ 的形式，其中 α, β 为实数．此外，还有几种标准的记法如 $z=x+iy$, $\zeta=\xi+i\eta$, $w=u+iv$ 等，在此，x, y, ξ, η, u, v 等总是理解为实数．复数 a 的实部和虚部还常记为 $\mathrm{Re}\,a$ 及 $\mathrm{Im}\,a$.

在推出复数加法与复数乘法的法则的过程中，我们只用到一个事实，那就是 $i^2=-1$．由于 $-i$ 具有同样的性质，因此，如将所有的 i 均换成 $-i$，则原来的一切规则必仍保持有效．这可通过直接验证来证明．将 $\alpha+i\beta$ 换成 $\alpha-i\beta$ 的变换称为复共轭，而 $\alpha-i\beta$ 就是 $\alpha+i\beta$ 的共轭复数．a 的共轭复数记为 $\bar{a}$．要一个数是实数，必须而且只须它与它的共轭数相等．共轭变换是一种对合变换，这就是说 $\bar{\bar{a}}=a$.

复数 a 的实部与虚部可用 a 及其共轭复数 $\bar{a}$ 表示为

$$\mathrm{Re}\,a=\frac{a+\bar{a}}{2},\quad \mathrm{Im}\,a=\frac{a-\bar{a}}{2i}.$$

因此，系统地使用记法 a 及 $\bar{a}$，就可以避免用两个不同的字母来表示实部和虚部．话虽如此，但这两种记法最好还是能灵活使用．

共轭变换的基本性质就是我们上面已经提到的那个性质，即

$$\overline{a+b}=\bar{a}+\bar{b},\quad \overline{ab}=\bar{a}\cdot\bar{b}.$$

由此可推出商的对应性质：如果 $ax=b$，则 $\bar{a}\bar{x}=\bar{b}$，因而 $(\overline{b/a})=\bar{b}/\bar{a}$．更一般地，令 $R(a, b, a, \cdots)$ 表施于复数 a, b, c, $\cdots$ 的任一有理运算，则

$$\overline{R(a, b, c, \cdots)}=R(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \cdots).$$

作为一个应用，考虑方程

$$c_0z^n+c_1z^{n-1}+\cdots+c_{n-1}z+c_n=0,$$

设 ζ 为这一方程的一个根，则 $\bar{\zeta}$ 必是方程

$$\bar{c}_0z^n+\bar{c}_1z^{n-1}+\cdots+\bar{c}_{n-1}z+\bar{c}_n=0$$

的一个根．特别是，若方程的系数均为实数，则 ζ 及 $\bar{\zeta}$ 必是同一方程的根，由此得到熟知的定理：实系数方程的非实数根必以成对的共轭根出现．

积 $a\bar{a}=\alpha^2+\beta^2$ 恒为正数或零．它的非负平方根称为复数 a 的

模或绝对值，记为$|a|$．这一术语和记法的正确性可从一个实数的模就等于该数本身取正号的值这一事实得到说明．

根据这一定义，

$$a\bar{a}=|a|^2,$$

式中$|a|\geqslant 0$，并注意到$|\bar{a}|=|a|$．对于乘积的绝对值，我们有

$$|ab|^2=ab\cdot\overline{ab}=ab\bar{a}\bar{b}=a\bar{a}b\bar{b}=|a|^2|b|^2;$$

因为它们都$\geqslant 0$，故而

$$|ab|=|a|\cdot|b|.$$

用文字来表述，就是：

积的绝对值等于各因子绝对值的积．

显然这一性质可以推广到任意有穷个复数的乘积：

$$|a_1a_2\cdots a_n|=|a_1|\cdot|a_2|\cdots|a_n|.$$

商a/b，$b\neq 0$满足关系$b(a/b)=a$，因此又有$|b|\cdot|a/b|=|a|$，或

$$\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}.$$

和的绝对值公式并不这样简单．我们有

$$|a+b|^2=(a+b)(\bar{a}+\bar{b})=a\bar{a}+(a\bar{b}+b\bar{a})+b\bar{b}$$

或

$$|a+b|^2=|a|^2+|b|^2+2\operatorname{Re}a\bar{b}. \tag{7}$$

差的绝对值公式为

$$|a-b|^2=|a|^2+|b|^2-2\operatorname{Re}a\bar{b}, \tag{7'}$$

将上两式相加，得到恒等式

$$|a+b|^2+|a-b|^2=2(|a|^2+|b|^2). \tag{8}$$

习　　题

1．试以$z=x+iy$及$z=x-iy$分别计算$z/(z^2+1)$的值，从而证明所得的结果是共轭的．

2．求下式的绝对值：

$$-2i(3+i)(2+4i)(1+i),\quad \frac{(3+4i)(-1+2i)}{(-1-i)(3-i)}.$$

3. 已知$|a|=1$或$|b|=1$，求证

$$\left|\frac{a-b}{1-\bar{a}b}\right|=1.$$

如$|a|=|b|=1$，则要上式成立，应有怎样的条件?

4. 求使一个复未知量的方程 $az+b\bar{z}+c=0$ 恰有一解的条件，并算出这个解.

5. 试证明复数形式的 Lagrange 恒等式

$$\left|\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right|^2=\sum_{i=1}^{n}|a_i|^2\sum_{i=1}^{n}|b_i|^2-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|a_i\bar{b}_j-a_j\bar{b}_i|^2.$$

1.5 不等式

现在我们来证明几个常用的重要不等式. 应该指出，在复数系中没有次序关系，因此，所有不等式都必须是实数之间的关系.

从绝对值的定义可得如下不等式

$$\begin{aligned}-|a|\leqslant\operatorname{Re}a\leqslant|a|,\\-|a|\leqslant\operatorname{Im}a\leqslant|a|.\end{aligned}\tag{9}$$

等式 $\operatorname{Re}a=|a|$ 当且仅当 a 是实数且 $\geqslant0$ 时成立.

如将(9)式应用于(7)，则得

$$|a+b|^2\leqslant(|a|+|b|)^2,$$

因此

$$|a+b|\leqslant|a|+|b|.\tag{10}$$

这就是所谓三角形不等式，这样命名的理由将在以后说明. 应用归纳法可将上面的关系推广至任意有限个数的和:

$$|a_1+a_2+\cdots+a_n|\leqslant|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|.\tag{11}$$

和的绝对值充其量等于各项绝对值的和.

在实数的情形中，读者会充分理解到估计式(11)的重要意义，今后我们将看到，这一式在复数理论中也有着不亚于在实数中的重要性.

现在让我们来确定所有使(11)式成为等式的条件. 在(10)式中，为使等号成立，必须而且只须 $a\bar{b}\geqslant0$（为方便起见，用 $c>0$ 表示 c 是实数而且还是正数）. 如 $b\neq0$，则这一条件可写为

$$|b|^2(a/b)\geqslant0,$$

因而等价于 $a/b\geqslant 0$. 在一般的情形下，我们可以这样做：设(11)中的等号成立，则

$$
\begin{aligned}
|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n| &= |(a_1+a_2)+a_3+\cdots+a_n| \\
&\leqslant |a_1+a_2|+|a_3|+\cdots+|a_n| \\
&\leqslant |a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|.
\end{aligned}
$$

因此得 $|a_1+a_2|=|a_1|+|a_2|$，如 $a_2\neq 0$，结果得 $a_1/a_2\geqslant 0$. 但项的下标是任意的，故知任意两个非零项之比必为正数. 反之，设这一条件成立. 假定 $a_1\neq 0$，则得

$$
\begin{aligned}
|a_1+a_2+\cdots+a_n| &= |a_1|\cdot\left|1+\frac{a_2}{a_1}+\cdots+\frac{a_n}{a_1}\right| \\
&= |a_1|\left(1+\frac{a_2}{a_1}+\cdots+\frac{a_n}{a_1}\right) \\
&= |a_1|\left(1+\frac{|a_2|}{|a_1|}+\cdots+\frac{|a_n|}{|a_1|}\right) \\
&= |a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|.
\end{aligned}
$$

总结上面的论断，可知：(11)式的等号当且仅当任意两个非零项之比为正数时成立.

由(10)又可得

$$|a|=|(a-b)+b|\leqslant|a-b|+|b|$$

或
$$|a|-|b|\leqslant|a-b|.$$

同理 $|b|-|a|\leqslant|a-b|$，这些不等式可合并为

$$|a-b|\geqslant\big||a|-|b|\big|. \tag{12}$$

当然同样的估计可运用于 $|a+b|$.

(10)式的一个特殊情形是下面的不等式

$$|\alpha+i\beta|\leqslant|\alpha|+|\beta|. \tag{13}$$

这表明：一个复数的绝对值不大于其实部及虚部绝对值的和.

尚有很多不等式也是经常要用到的，其证明稍较复杂. 就中有 Cauchy 不等式

$$
\begin{aligned}
&|a_1b_1+\cdots+a_nb_n|^2 \\
&\quad\leqslant(|a_1|^2+\cdots+|a_n|^2)(|b_1|^2+\cdots+|b_n|^2),
\end{aligned}
$$

或简写成

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right|^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 \sum_{i=1}^{n} |b_i|^2. \text{ ❶} \tag{14}$$

要证明上式，令 λ 代表任一复数．由(7)可得

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i - \lambda \bar{b}_i|^2 = \sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 + |\lambda|^2 \sum_{i=1}^{n} |b_i|^2 - 2\operatorname{Re} \bar{\lambda} \sum_{i=1}^{n} a_i b_i. \tag{15}$$

对于所有的 λ，这一式都 $\geqslant 0$．我们可以选定

$$\lambda = \frac{\sum_1^n a_i b_i}{\sum_1^n |b_i|^2},$$

因为如果分母等于零，那就没有什么好证明了．这样的选择不是任意的，其目的是使(15)式尽可能简单．代入(15)，经简化后得

$$\sum_1^n |a_i|^2 - \frac{\left|\sum_1^n a_i b_i\right|^2}{\sum_1^n |b_i|^2} \geqslant 0,$$

这一式与(14)式等价．

从(15)式我们可以进一步得出结论：(14)式的等号当且仅当 a_i 与 $\bar{b}_i$ 成比例时成立．

Cauchy 不等式也可用 Lagrange 恒等式(1.4 节习题 5)证明．

习　　题

1．求证，如果 $|a|<1$，$|b|<1$，则

$$\left|\frac{a-b}{1-\bar{a}b}\right| < 1.$$

2．试以归纳法证明 Cauchy 不等式．

3．如 $|a_i|<1$，$\lambda_i \geqslant 0$ $(i=1, \cdots, n)$，且 $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=1$，试证明

$$|\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_n a_n| < 1.$$

4　证明：复数 z 满足

$$|z-a| + |z+a| = 2|c|$$

的充要条件是 $|a| \leqslant |c|$．如果这一条件满足，则 $|z|$ 的最大值和最小值是什么?

---

❶ i 是一个常用的求和指标，用作下标，不能与虚数单位相混．避免使用它亦似无必要．

2 复数的几何表示

对于平面上一个给定的直角坐标系来说，复数 $a=\alpha+i\beta$ 可以用坐标为 (α, β) 的点来表示. 这是一个常用的表示法，并且常把点 a 作为数 a 的同义词. 第一个坐标轴(x 轴)称为实轴，第二个坐标轴(y 轴) 称为虚轴. 两轴所在的平面称为复数平面.

几何表示之所以有用，在于它清晰的图形及简彻的术语. 不过，我们取如下观点：分析中的所有结论都应从实数性质，而不是从几何公理推导出来. 由于这一缘故，我们只用几何作描述，而不用作正当的证明，除非语言是如此显见，其分析解释已属自明. 这一看法使我们对几何考虑不致提出严密的要求.

2.1 几何的加法及乘法

复数的加法可以想象为矢量的加法. 设一个复数不仅以一点表示，而且以一个由原点指向这一点的矢量表示. 这个复数，这一点以及这个矢量都以同一字母 a 表示. 象平常一样，任何一个矢量作平行移动后所得的所有矢量都视为与原矢量恒等.

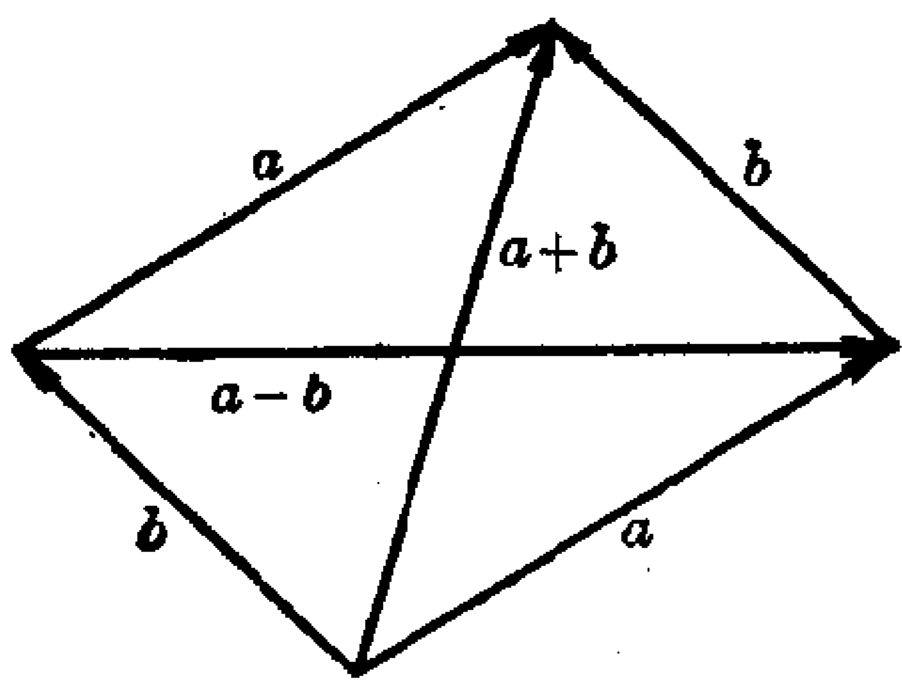


图 1-1 矢量加法

作一矢量 b，使其起点与矢量 a 的终点重合. 则由 a 的起点引至 b 的终点的矢量就是 $a+b$. 要作出差 $b-a$，可由同一起点画出矢量 a 和 b，则由 a 的终点指向 b 的终点的矢量就是 $b-a$. 注意 $a+b$ 及 $a-b$ 是以 a、b 为边的平行四边形的两条对角线(图 1-1).

矢量表示的另一优点就是矢量 a 的长等于 $|a|$. 因此点 a 与 b 之间的距离为 $|a-b|$. 在这个意义上，三角形不等式 $|a+b|\leqslant|a|+|b|$ 及恒等式 $|a+b|^2+|a-b|^2=2(|a|^2+|b|^2)$ 就成为熟知的几何定理了.

点 a 及其共轭数 $\bar{a}$ 对称地位于实轴的两边. 点 a 关于虚轴的对称点为 $-\bar{a}$. 四个点 a, $-\bar{a}$, $-a$, $\bar{a}$ 是一矩形的四个顶点, 两坐标轴是这一矩形的对称轴.

为了作出两个复数乘积的几何解释, 我们引用极坐标. 如果一点(α, β)的极坐标为(r, φ), 则

$$\alpha = r\cos\varphi,$$
$$\beta = r\sin\varphi.$$

因此 $a=\alpha+i\beta=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$. 在这个复数的**三角表示**中, r 永远 $\geqslant 0$, 且等于模$|a|$. 极角 φ 称为复数的**幅角**, 并以 $\arg a$ 表示之.

考察两复数 $a_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$ 及 $a_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$. 它们的积为

$$a_1a_2=r_1r_2[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2+\cos\varphi_1\sin\varphi_2)].$$

根据余弦及正弦的加法定理, 上式可简化为

$$a_1a_2=r_1r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)]. \tag{16}$$

由此可知乘积的模为 r_1r_2, 幅角为 $\varphi_1+\varphi_2$. 后面这一结果是新的, 可用下式表示:

$$\arg(a_1a_2)=\arg a_1+\arg a_2. \tag{17}$$

显然, 这一公式可推广至任意多个因子的积, 因而

积的幅角等于各因子幅角的和.

这是基本的规则. 这一规则为复数的几何表示作了有力的论证. 但是, 我们必须切实了解, 得出公式(17)的方式是与我们的原则违背的. 首先, 公式(17)是**角**的关系而不是数的关系, 其次, 它的证明要用到三角学. 因而, 我们还须用分析的词句来定义幅角, 并以纯分析的方法来证明(17). 我们现在暂缓来作这个证明, 仍然从一个不十分严密的观点来讨论(17)式的结果.

首先我们注意 0 的幅角是没有定义的. 因此, (17)式只有在 a_1 及 $a_2\neq 0$ 的时候才有意义. 其次, 极角在许可相差 $360°$ 的倍数的条件下才是唯一确定的. 因此, 如果我们要从数值上来解释

(17)，我们应约定 360° 的倍数不计在内.

由(17)式可得积 a_1a_2 的简单几何作图法. 显然，以 0, 1, a_1 为顶点的三角形将与以 0, a_2, a_1a_2 为顶点的三角形相似. 点 0, 1, a_1 及 a_2 均为已知，因此，由相似性就可确定出点 a_1a_2(图 1-2).

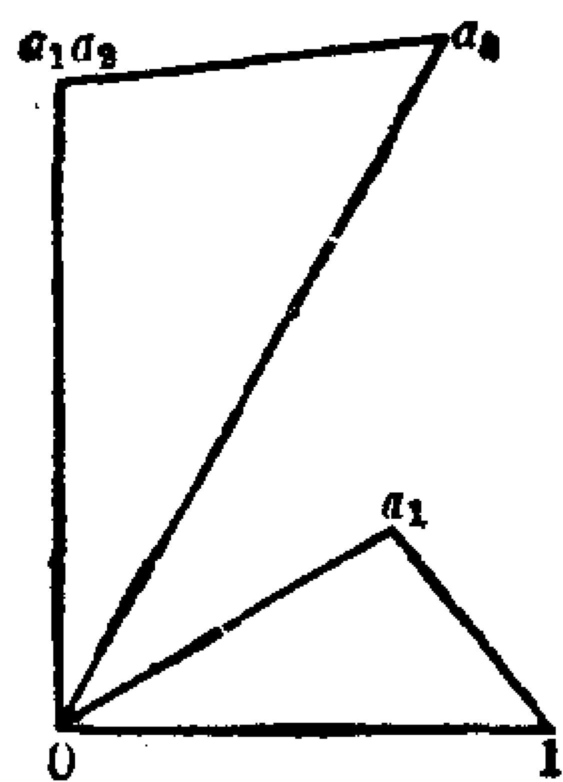


图 1-2 矢量乘法

在除法的情况下，(17)变为

$$\arg\frac{a_2}{a_1}=\arg a_2-\arg a_1. \tag{18}$$

其几何作法仍相同，但现在的相似三角形为 0, 1, a_1 及 0, a_2/a_1, a_2.

注：定义角和幅角的一种可接受方式是应用熟知的微积分方法，它把一段圆弧的长度表示成一个定积分. 这导致三角函数的正确定义，导致加法定理的计算证明.

我们不遵循这一途径的理由是：复分析与实分析不同，它提供了一种远为直接的方法. 线索可从指数函数与三角函数的直接联系中找到，这将在第 2 章第 3 节中推导，那时读者就会消除对完全严密性的顾虑.

习　题

1. 求点 a 关于坐标轴分角线的对称点.

2. 求证点 a_1, a_2, a_3 在而且只有在

$$a_1^2+a_2^2+a_3^2=a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1$$

时为等边三角形的三顶点.

3. 设 a 及 b 为一正方形的两个顶点. 求所有可能情形下的另外两个顶点.

4. 一个三角形的三顶点为 a_1, a_2, a_3. 试求其外接圆的圆心及半径. 将结果写成对称形式.

2.2 二项方程

从上面这些我们并未要求有严格证明的结果中，可得

$a=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$的幂为

$$a^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi). \tag{19}$$

这一公式在 $n=0$ 时显然成立，而由于

$$a^{-1}=r^{-1}(\cos\varphi-i\sin\varphi)=r^{-1}[\cos(-\varphi)+i\sin(-\varphi)],$$

故知当 n 为负整数时亦真确.

当 $r=1$ 时，得 de Moivre 公式

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+i\sin n\varphi. \tag{20}$$

这一式提供了将 $\cos n\varphi$ 及 $\sin n\varphi$ 以 $\cos\varphi$ 及 $\sin\varphi$ 表示的最简单方法.

要求复数 a 的 n 次根，必须解出方程

$$z^n=a. \tag{21}$$

设 $a\neq0$, 且

$$a=r(\cos\varphi+i\sin\varphi),$$

$$z=\rho(\cos\theta+i\sin\theta),$$

则(21)式变为

$$\rho^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)=r(\cos\varphi+i\sin\varphi). \tag{22}$$

这一方程当 $\rho^n=r$, $n\theta=\varphi$ 时显然成立. 因此得所求根为

$$z=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n}+i\sin\frac{\varphi}{n}\right),$$

式中 $\sqrt[n]{r}$ 为正数 r 的 n 次正根.

但这并不是唯一解. 事实上，如 $n\theta$ 与 φ 相差为 $360°$ 的整倍数，则(22)式仍成立. 如角以弧度计算，则一周角等于 2π, 因此(22)式在而且只有在

$$\theta=\frac{\varphi}{n}+k\cdot\frac{2\pi}{n}$$

时成立，其中 k 为任一整数. 不过，只有 $k=0, 1, \cdots, n-1$, 可给出不同的 z 值. 因此方程(21)的完全解为

$$z=\sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n}+k\frac{2\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\varphi}{n}+k\frac{2\pi}{n}\right)\right],$$

$$k=0, 1, \cdots, n-1.$$

一个不等于零的复数的 n 次根有 n 个，它们的模都相同，但它

们的幅角是匀间隔地分布的.

从几何上看，n 次根的全部正好是正 n 边形的各个顶点.

$a=1$ 的情形是特别重要的. 方程 $z^n=1$ 的根称为 1 的 n 次根，如令

$$\omega=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}, \tag{23}$$

则所有的根可表示为 $1, \omega, \omega^2, \cdots, \omega^{n-1}$. 显然，如以 $\sqrt[n]{a}$ 表示 a 的任一 n 次根，则 n 次根的全体可表示为

$$\omega^k\cdot\sqrt[n]{a}\quad(k=0,\ 1,\ \cdots,\ n-1).$$

习 题

1. 试以 $\cos\varphi$ 及 $\sin\varphi$ 表示 $\cos 3\varphi$, $\cos 4\varphi$, $\sin 5\varphi$.

2. 简化

$$1+\cos\varphi+\cos 2\varphi+\cdots+\cos n\varphi$$

和

$$\sin\varphi+\sin 2\varphi+\cdots+\sin n\varphi.$$

3. 将 1 的 5 次根及 10 次根表示为代数形式.

4 如 ω 由(23)式给定，求证：对于任一整数 h，只要 h 不是 n 的倍数，就有

$$1+\omega^h+\omega^{2h}+\cdots+\omega^{(n-1)h}=0.$$

5. 求 $1-\omega^h+\omega^{2h}-\cdots+(-1)^{n-1}\omega^{(n-1)h}$ 的值.

2.3 解析几何

在古典解析几何里，一个轨迹的方程表成 x 和 y 之间的一种关系. 它也可以用 z 和 $\bar{z}$ 表示，有时会得到很大的方便. 应记住的是一个复方程本来就等价于两个实方程；为了得到真实的轨迹，这些方程应该在本质上是同一的.

例如：圆的方程是 $|z-a|=r$. 表成代数形式可改写成

$$(z-a)(\bar{z}-\bar{a})=r^2.$$

这一方程在复共轭下是不变的. 这一事实说明它代表一个单一的实方程.

复平面上的一条直线可用参数方程 $z=a+bt$ 给出，这里 a 和 b 都是复数，且 $b\neq0$；参数 t 取遍所有实数值．两方程 $z=a+bt$ 和 $z=a'+b't$ 代表同一直线，当且仅当 $a'-a$ 和 b' 都是 b 的实数倍数．当 b' 是 b 的实数倍数时，这两条直线平行，如果 b' 是 b 的正倍数，则它们有相同的指向．一条有向直线的方向可用 $\arg b$ 来标志．$z=a+bt$ 与 $z=a'+b't$ 之间的夹角是 $\arg b'/b$；注意，它依赖于这两条直线命名的顺序．如果 b'/b 是纯虚数，则两直线相互正交．

求直线与圆的交点、平行线、正交直线、切线及类似的问题，表示成复形式时，一般会变得特别简单．

不等式 $|z-a|<r$ 表示圆的内部．类似地，有向直线 $z=a+bt$ 在 $\mathrm{Im}(z-a)/b<0$ 时确定一右半平面，而当 $\mathrm{Im}(z-a)/b>0$ 时确定一左半平面．易证这个区别是不依赖于参数表示的．

习　题

1. $az+b\bar{z}+c=0$ 在什么时候表示一条直线？
2. 写出椭圆、双曲线、抛物线的复形式方程．
3. 证明：平行四边形的对角线相互平分；菱形的对角线相互正交．
4. 解析证明一个圆的平行弦的中点都在垂直于该弦的直径上．
5. 证明：过 a 和 $1/\bar{a}$ 的所有圆，都与圆 $|z|=1$ 正交．

2.4 球面表示

引入记号 ∞ 表示无穷大来推广复数系统 **C** 在许多场合都是有用的．它与有限数的联系是通过下面两个关系式来建立的：对于所有有限的 a，$a+\infty=\infty+a=\infty$；对于所有的 $b\neq0$，包括 $b=\infty$，有

$$b\cdot\infty=\infty\cdot b=\infty.$$

不过，在遵从算术运算规则的情形下，就不可能定义 $\infty+\infty$ 及 $0\cdot\infty$．根据特殊的约定，我们仍然可以写 $a/0=\infty\,(a\neq0)$ 及 b/∞

$=0(b\neq\infty)$.

在平面上，对应于 ∞ 的点的位置是没有的，但我们还是可以引入一个“理想”的点，称之为无穷远点．平面上的所有点连同无穷远点组成扩充复数平面．我们约定每一条直线都要通过无穷远点，同时，没有一个半平面包含这无穷远点．

我们须要作出一个几何的模型，在这个模型上一切扩充平面上的点都可以有一具体的表示．为此，考察单位球面 S，它在三维空间中的方程为 $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$．对于 S 上的每一个点，除了(0, 0, 1)以外，我们可用一个复数

$$z=\frac{x_1+ix_2}{1-x_3} \tag{24}$$

与之对应，这个对应是一对一的．事实上，由(24)可得

$$|z|^2=\frac{x_1^2+x_2^2}{(1-x_3)^2}=\frac{1+x_3}{1-x_3},$$

因此

$$x_3=\frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}. \tag{25}$$

同理可得

$$x_1=\frac{z+\bar{z}}{1+|z|^2},\quad x_2=\frac{z-\bar{z}}{i(1+|z|^2)}. \tag{26}$$

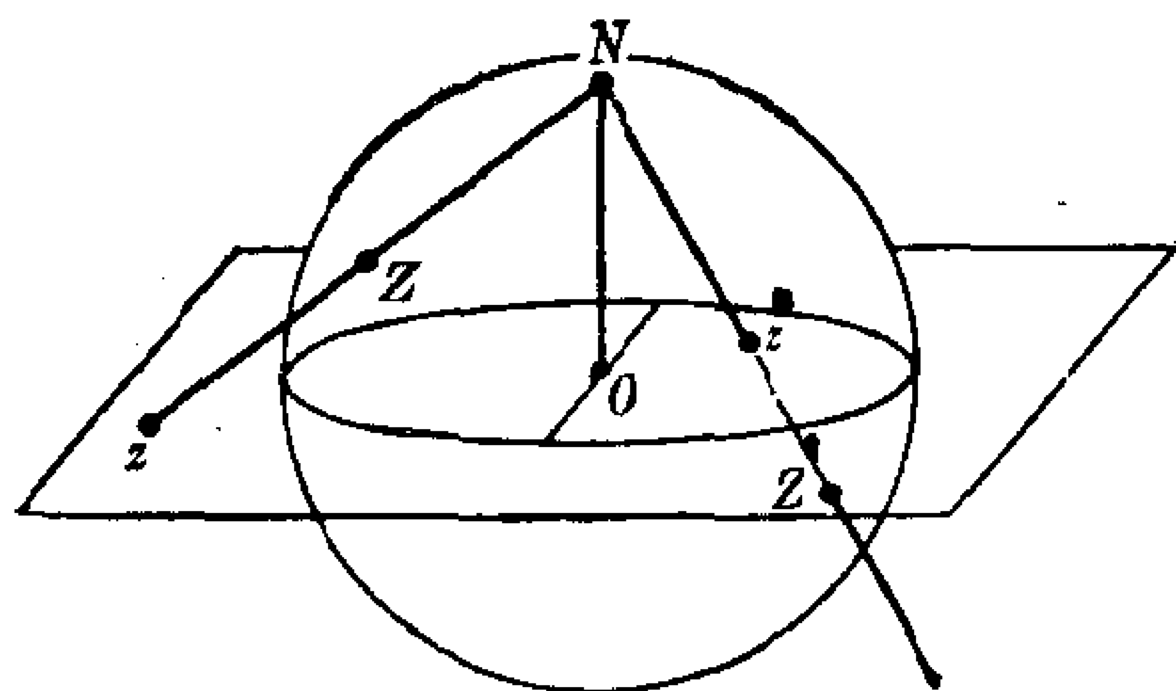


图 1-3　球极平面射影

令无穷远点对应于(0, 0, 1)就可完成球面上的点与复数的对应，因此，可把球面作为扩充平面或扩充数系的代表．注意，$x_3<0$ 的半球对应于圆盘 $|z|<1$，而 $x_3>0$ 的半球对应于圆盘的外部 $|z|>1$．在函数论中，球面 S 称为 Riemann 球面．

如果复数平面就是以 x_1 轴与 x_2 轴分别为实轴和虚轴的 (x_1, x_2) 平面，则变换(24)具有简单的几何意义．取 $z=x+iy$，可证

$$x:y:-1=x_1:x_2:x_3-1, \tag{27}$$

这说明点$(x, y, 0)$、(x_1, x_2, x_3)及$(0, 0, 1)$在一直线上. 因此,这个对应实际是以$(0, 0, 1)$为中心的中心投影,如图1.3所示,我们称之为球极平面射影. 至于球极平面射影究竟应看作是从S到扩充复平面的映照,还是反过来,这从上下文中会看得清楚.

在球面表示中,对于加法及乘法没有简单的解释,其方便在于无穷远点不再有所特殊了.

从几何上显然可见球极平面射影将z平面上的每一直线变换为S上的一个通过极$(0, 0, 1)$的圆,其逆亦真. 更一般地来说,球面上的任一圆对应于z平面上的一个圆或一直线. 为了证明这一点,设球上的一个圆所在的平面为$\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_3x_3=\alpha_0$, 此处,我们可以假设$\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2=1$, 且$0\leqslant\alpha_0<1$. 这一方程以$z$及$\bar{z}$表示时就有下列形式

$$\alpha_1(z+\bar{z})-\alpha_2i(z-\bar{z})+\alpha_3(|z|^2-1)=\alpha_0(|z|^2+1)$$

或
$$(\alpha_0-\alpha_3)(x^2+y^2)-2\alpha_1x-2\alpha_2y+\alpha_0+\alpha_3=0.$$

当$\alpha_0\neq\alpha_3$时, 上式是一个圆的方程, 而当$\alpha_0=\alpha_3$时, 它代表一直线. 反之, 任一圆或直线的方程都可写成上面的形式. 因此证明了对应是一对一的.

不难算出z及z'的球极平面射影之间的距离$d(z, z')$. z及z'在球面上的对应点以(x_1, x_2, x_3)、(x_1', x_2', x_3')表示,则

$$(x_1-x_1')^2+(x_2-x_2')^2+(x_3-x_3')^2$$
$$=2-2(x_1x_1'+x_2x_2'+x_3x_3').$$

由(35)及(36)式,经过简单运算后得

$$x_1x_1'+x_2x_2'+x_3x_3'$$
$$=\frac{(z+\bar{z})(z'+\bar{z}')-(z-\bar{z})(z'-\bar{z}')+(|z|^2-1)(|z'|^2-1)}{(1+|z|^2)(1+|z'|^2)}$$
$$=\frac{(1+|z|^2)(1+|z'|^2)-2|z-z'|^2}{(1+|z|^2)(1+|z'|^2)}.$$

最后得

$$d(z, z')=\frac{2|z-z'|}{\sqrt{(1+|z|^2)(1+|z'|^2)}}. \tag{28}$$

当 $z'=\infty$ 时，上式变为

$$d(z,\ \infty)=\frac{2}{\sqrt{1+|z|^2}}.$$

习　　题

1．试证明 z 及 z' 对应于 Riemann 球面上一直径的两端点的充要条件是 $z\bar{z}'=-1$.

2．一个立方体的所有顶点都在球面 S 上，其各棱平行于坐标轴，试求其各顶点的球极平面射影.

3．试为一般位置上的正四面体解同样问题.

4．设 z 及 z' 的球极平面射影为 Z 及 Z'，并设 N 为北极．求证三角形 NZZ' 及 Nzz' 相似，并由此导出(28)式.

5．在平面上有一个圆，其圆心为 a，半径为 R，试求这一圆的球面象的半径.

第2章　复　函　数

1　解析函数的概念导引

复变函数论的目标是把微积分推广到复域．微分和积分两者都获得了新的深度和意义；但是，可应用的范围却变得非常狭窄了．事实上，只有解析函数或全纯函数可以自由地进行微分和积分．它们是法文“Théorie des fonctions”或德文“Funktionentheorie”意义下唯有的真正的“函数”．

然而，我们将按近代意义来使用“函数”这一词．因此，在涉及复数的时候，我们必须考虑四种不同类型的函数：一个实变数的实函数；一个复变数的实函数；一个实变数的复函数；一个复变数的复函数．在实用上，我们总用字母 z 和 w 表示复变数；这样，为了表明一个复变数的复函数，我们用记法 $w=f(z)$ [1]．记法 $y=f(x)$ 将在两可情况下使用，x 和 y 既可以理解为实的，也可以理解为复的．如要指明一个变数确定地限于取实数，通常就用 t 表示．根据这些规定，我们并不取消早先在记法 $z=x+iy$ 中 x 与 y 自动地意味着实数的约定．

定义函数的规则应该用简洁而不含混的词句来阐述．换言之，所有的函数都必须是确切定义的，因而，在另有说明以前是单值的 [2]．

一个函数不必对自变数的所有值都有定义．暂时我们故意降

[1] 近代学生都认为，f 代表函数，$f(z)$ 代表函数的值．但是，传统上分析学家习惯于并继续说“函数 $f(z)$”．

[2] 我们有时用“单值函数”这个词来强调：对变量的每一个值，函数只有一个值．

低点集论的作用．因此我们仅作非正规的规定：每一个函数都定义在一个开集上，这是指：如果 $f(a)$ 有定义，则 $f(x)$ 对充分接近 a 的所有 x 有定义．点集拓扑的正式处理将推迟到下一章．

1.1 极限与连续性

我们采用下面的基本定义：

定义 1 我们称函数 $f(x)$ 当 x 趋于 a 时具有极限 A，记为

$$\lim_{x\to a} f(x)=A, \tag{1}$$

是指它满足下面的充要条件：

任给正数 $\varepsilon>0$，存在一个正数 δ，对于所有的 x，只要 $|x-a|<\delta$，且 $x\neq a$，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$．

这一定义中所用的只能是绝对值．由于绝对值概念对复数和实数都有意义，因此，不论变数 x 和函数 $f(x)$ 是实的还是复的，这一定义都可以适用．

我们有时用另一种较简单的记法：当 $x\to a$ 时 $f(x)\to A$．

当 a 或 A 是无穷大时，相应的定义有几个熟知的变式．在实数的情形，我们可以区别极限 $+\infty$ 与 $-\infty$，但在复数的场合，只有一个无穷大极限．希望读者自己作出一个概括一切可能的正确定义．

关于和、积及商的极限的熟知结果在复数的情形下仍然有效．事实上，这些结果的证明只与绝对值的性质有关，这些性质是

$$|ab|=|a|\cdot|b|,\quad |a+b|\leqslant|a|+|b|.$$

条件(1)显然等价于

$$\lim_{x\to a}\overline{f(x)}=\overline{A}. \tag{2}$$

由(1)及(2)可得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\operatorname{Re}f(x)&=\operatorname{Re}A,\\ \lim_{x\to a}\operatorname{Im}f(x)&=\operatorname{Im}A.\end{aligned} \tag{3}$$

反过来，(1)就是(3)的结果．

函数 $f(x)$ 称为在点 a 连续，必须而且只须 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$. 毋庸另作解释，一个连续函数就是在所有各点上都连续的函数.

两个连续函数的和 $f(x)+g(x)$ 及积 $f(x)g(x)$ 仍然是连续的；为要商 $f(x)/g(x)$ 在点 a 有定义且连续，必须而且只须 $g(a)\neq 0$. 如果 $f(x)$ 连续，则 $\operatorname{Re} f(x)$, $\operatorname{Im} f(x)$ 及 $|f(x)|$ 均连续.

一个函数的导数定义为一特殊的极限，对它的研究可以置变数为实的还是复的于不同. 形式的定义是

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}. \tag{4}$$

对于和、积及商的一般求导法则全部有效. 复合函数的导数用链导法确定.

在实的自变数与复的自变数之间还是有着一个基本的区别的. 为了说明这一点，令 $f(z)$ 为复变数 z 的一个实值函数，并设它在点 $z=a$ 可导. 则一方面，$f'(a)$ 是实的，因为它是商

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

当 h 经实数值趋向于零时的极限. 但在另一方面，它也是商

$$\frac{f(a+ih)-f(a)}{ih}$$

的极限，因此是一纯虚数. 所以 $f'(a)$ 必须为零. 由此可知，一个复变数的实值函数或者其导数为零，或者其导数不存在.

一个实变数的复值函数可以转化为实的情形. 如令

$$z(t)=x(t)+iy(t),$$

则

$$z'(t)=x'(t)+iy'(t),$$

$z'(t)$ 的存在相当于 $x'(t)$ 及 $y'(t)$ 同时存在. 复数式的记法还是有着某些形式上的方便，放弃这种记法是不智的.

相反，一个复变数的复值函数的导数的存在对函数的结构性质具有重大的意义，这些结果的研究就是复变函数论的中心内容.

1.2 解析函数

在函数有定义的每一点上具有导数的一个复变数的复值函数组成解析函数类. 用全纯函数这一词具有完全相同的意义. 就这一开始研究的目的来说, 读者可以首先设想定义在全平面上的函数.

两个解析函数的和或积仍是解析的. 同样, 两个解析函数的商 $f(z)/g(z)$, 只要 $g(z)$ 不等于零, 也是解析的. 在一般的情形下, 必须除去使 $g(z)=0$ 的点. 严格地说, 这种完全是典型的情形将不列在我们讨论范围之内, 但我们所得的结果, 除了应作一些明显的修正之外, 显然普遍有效.

导数的定义可以重写成如下的形式:

$$f'(z)=\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}.$$

于是得知 $f(z)$ 必须是连续的. 事实上, 从

$$f(z+h)-f(z)=h[f(z+h)-f(z)]/h$$

可得
$$\lim_{h\to 0}[f(z+h)-f(z)]=0\cdot f'(z)=0.$$

此外, 如置 $f(z)=u(z)+iv(z)$, 则知 $u(z)$ 及 $v(z)$ 也都是连续的.

差商的极限不论 h 以怎样方式趋近于零都应相同. 如果我们为 h 选取实数值, 则虚部 y 应保持为常数, 这时的导数变为对 x 的偏导数. 因此

$$f'(z)=\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

同样, 如我们为 h 选定纯虚数值 ik, 则

$$f'(z)=\lim_{k\to 0}\frac{f(z+ik)-f(z)}{ik}=-i\frac{\partial f}{\partial y}=-i\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}.$$

由此可知 $f(z)$ 应满足偏微分方程

$$\frac{\partial f}{\partial x}=-i\frac{\partial f}{\partial y}, \tag{5}$$

这一式可分解为两个实的方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{6}$$

这是 Cauchy-Riemann 微分方程,应为任一解析函数的实部和虚部所满足[1].

应当指出,(6)式中四个偏导数的存在是由 $f'(z)$ 的存在所决定的. 应用(6)式,我们可以为 $f'(z)$ 写出四个形式上不同的表示式,其最简单的是

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

例如,对于量 $|f'(z)|^2$,有

$$|f'(z)|^2=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2$$
$$=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}.$$

最后一式表明 $|f'(z)|^2$ 是 u 及 v 关于 x 及 y 的 Jacobi 行列式.

后面我们将证明任一解析函数的导数本身也是解析的. 根据这一事实可知 u 及 v 将具有各阶连续偏导数, 特别是其混合导数应相等. 据此,由(6)可得

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$$
$$\Delta v=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0.$$

满足 Laplace 方程 $\Delta u=0$ 的函数 u 称为调和函数. 因此,一个解析函数的实部和虚部是调和的. 如果两个调和函数 u 及 v 满足 Cauchy-Riemann 方程(6), 那么 v 就称为是 u 的共轭调和函数. 实际上, v 只能确定到不计一个附加常数,因此用定冠词虽然出于惯例,却不是非常确切的. 在同样的意义下, u 是 $-v$ 的共轭调和函数.

在这里我们不准备讨论可加于调和函数的最弱的正规条件. 不过, 我们要证明由一对共轭调和函数所确定的函数 $u+iv$ 永远是解析的, 为此, 我们作出明确的假设,设 u 及 v 具有连续的一阶偏导数. 在微积分学中曾经证明, 正是在这些正规条件之下, 可

[1] A. Cauchy (1789～1857) 及 B. Riemann (1826～1866) 被公认为是复变函数论的首创者. Riemann 的工作着重于几何方面;而 Cauchy 则着重于纯分析方面.

有

$$u(x+h,\ y+k)-u(x,\ y)=\frac{\partial u}{\partial x}h+\frac{\partial u}{\partial y}k+\varepsilon_1,$$

$$v(x+h,\ y+k)-v(x,\ y)=\frac{\partial v}{\partial x}h+\frac{\partial v}{\partial y}k+\varepsilon_2,$$

式中 ε_1, ε_2 趋于零较快于 $h+ik$, 即当 $h+ik\to 0$ 时,

$$\varepsilon_1/(h+ik)\to 0,\ \ \varepsilon_2/(h+ik)\to 0.$$

取记法 $$f(z)=u(x,\ y)+iv(x,\ y),$$

由关系式(6)得

$$f(z+h+ik)-f(z)=\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)(h+ik)+\varepsilon_1+i\varepsilon_2,$$

因此 $$\lim_{h+ik\to 0}\frac{f(z+h+ik)-f(z)}{h+ik}=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

因此 $f(z)$ 是解析的.

如果 $u(x,\ y)$ 和 $v(x,\ y)$ 具有满足 Cauchy-Riemann 方程的连续一阶偏导数, 则 $f(z)=u(z)+iv(z)$ 是解析的, 具有连续导数 $f'(z)$. 反过来也对.

一个调和函数的共轭函数可以用积分来求得, 在一些简单的场合, 计算可做得很明显. 例如, $u=x^2-y^2$ 是调和的, 而且

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-2y.$$

与之共轭的函数因此必须满足

$$\frac{\partial v}{\partial x}=2y,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=2x.$$

从第一式得 $v=2xy+\varphi(y)$, 其中 $\varphi(y)$ 是 y 独自的函数. 代入第二式得 $\varphi'(y)=0$, 因此 $\varphi(y)$ 为一个常数, 故得 x^2-y^2 的最一般的共轭函数是 $2xy+c$, 其中 c 是一常数. 注意到 $x^2-y^2+2ixy=z^2$. 故知具有实部 x^2-y^2 的解析函数为 z^2+ic.

这里有一个有趣的形式方法, 它可以使解析函数的本质格外突出. 我们提出这一方法的同时要明白地告诉读者, 这一方法纯粹是形式的, 不具有任何证明力.

考察两个实变数的复值函数 $f(x,\ y)$. 引进复变数 $z=x+iy$

及其共轭数 $\bar{z}=x-iy$，则

$$x=\frac{1}{2}(z+\bar{z}),\quad y=-\frac{1}{2}i(z-\bar{z}).$$

采用这样的变数变换就可把 $f(x, y)$ 考虑为 z 及 $\bar{z}$ 的函数，而把 z 及 $\bar{z}$ 作为自变数(它们实际是互相共轭的，但我们暂不注意及此)．如微分法则可用，则可得

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}-i\frac{\partial f}{\partial y}\right),\quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+i\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

这些表示式在作为极限定义时并没有什么方便的地方，但我们仍然可以把它们作为对于 z 及 $\bar{z}$ 的形式导数．与 (5) 式比较就可知解析函数是以条件 $\partial f/\partial\bar{z}=0$ 为其特征．因此，我们不妨说：一个解析函数与 $\bar{z}$ 无关，而是 z 独自的函数．

这就是我们把解析函数看作确实是一个复变数的函数而不称之为两个实变数的复值函数的理由．

根据同样的形式论断，我们可以导出一个极其简单的方法，利用这一方法，可以不必应用积分，就能算出实部为已知调和函数 $u(x, y)$ 的解析函数 $f(z)$．首先我们注意到共轭函数 $\overline{f(z)}$ 对 z 的导数为零，因而可以把它看作是 $\bar{z}$ 的函数；我们以 $\bar{f}(\bar{z})$ 表示这一函数．用这一记法可立出如下的恒等式：

$$u(x, y)=\frac{1}{2}[f(x+iy)+\bar{f}(x-iy)].$$

我们有理由相信这是一个形式恒等式，因此当 x, y 即使是复数时也成立．如以 $x=\frac{z}{2}, y=\frac{z}{2i}$ 代入，得

$$u(z/2,\ z/2i)=\frac{1}{2}[f(z)+\bar{f}(0)].$$

由于所需确定的 $f(z)$ 可相差一个纯虚数常数，所以我们尽可以设 $f(0)$ 为实数，因而 $\bar{f}(0)=u(0, 0)$．这样，函数 $f(z)$ 可用如下的公式计算：

$$f(z)=2u(z/2,\ z/2i)-u(0,\ 0).$$

一个纯虚数常数可任意加入．

在这一形式中，所用的方法显然只限于 $u(x, y)$ 是 x，y 的有理函数的情形，因为这函数对自变数的复数值必须具有意义．毫无疑问，这一方法可以推广到一般的情形而且可以作出完全的证明．

习　题

1．如 $g(w)$ 及 $f(z)$ 都是解析函数，试证明 $g(f(z))$ 也是解析函数．

2．试对函数 z^2 及 z^3 证明 Cauchy-Riemann 方程．

3．试求形如 $ax^3+bx^2y+cxy^2+dy^3$ 的最一般的调和多项式．用积分法及形式法确定共轭调和函数及对应的解析函数．

4．试证明一个非常数的解析函数不能具有常数的绝对值．

5．试严格地证明函数 $f(z)$ 及 $f(\bar{z})$ 是同时解析的．

6．试证明函数 $u(z)$ 及 $u(\bar{z})$ 是同时调和的．

7．试证明一个调和函数必满足形式微分方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}}=0.$$

1.3　多项式

每一个常数是导数等于零的解析函数．最简单的非常数的解析函数是 z，其导数为 1．由于两个解析函数的和及积仍是解析的，因此任一多项式

$$P(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n \tag{7}$$

必是一个解析函数．它的导数是

$$P'(z)=a_1+2a_2z+\cdots+na_nz^{n-1}.$$

(7)式的记法应要求 $a_n\neq 0$，因此这一多项式称为 n 次多项式．常数 0 也可作为一个多项式❶，但在很多方面都是除外的，在我们的讨论中将不包括这一情形．

当 $n>0$ 时，方程 $P(z)=0$ 至少有一个根．这就是所谓代数学

❶ 在形式上，如把常数 0 作为一个多项式，则其次数为 $-\infty$．

的基本定理，我们将在以后证明．如 $P(\alpha_1)=0$，在初等代数学中曾证明 $P(z)=(z-\alpha_1)P_1(z)$，此处 $P_1(z)$是 $n-1$ 次多项式．重复这一过程，最后即将 $P(z)$完全析成因式：

$$P(z)=a_n(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_n), \tag{8}$$

此处 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 不必要全部相异．从上面的因子分解中可知 z 的值异于 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_n$ 时 $P(z)$不会等于零．此外，除了因子的次序之外，因子分解是唯一确定的．

如果确定有 h 个 α_i 重合，它们的公共值称为 $P(z)$ 的 h 阶零点．由此可知一个多项式的零点的阶数的总和等于多项式的次数．更简单地说，如果每一个零点有几阶就算几次，那末，一个 n 次多项式就实实在在有 n 个零点．

一个零点 α 的阶数也可以从 $P(z)$ 的逐次导数在 $z=\alpha$ 时的值来确定．设 α 是一个 h 阶零点．则 $P(z)=(z-\alpha)^h P_h(z)$，其中 $P_h(\alpha)\neq 0$．逐次求导数得

$$P(\alpha)=P'(\alpha)=\cdots=P^{h-1}(\alpha)=0,$$

$P^{(h)}(\alpha)\neq 0$．换言之，一个零点的阶数恰等于各阶导数中第一个不等于零的导数的阶数．1 阶零点称为单零点，并以条件 $P(\alpha)=0$，$P'(\alpha)\neq 0$ 为其特征．

作为一个应用，我们来证明下面的 Lucas 定理：

定理 1 如果多项式 $P(z)$的所有零点都位于一个半平面上，则导数 $P'(z)$的所有零点也位于同一半平面上．

从(8)得

$$\frac{P'(z)}{P(z)}=\frac{1}{z-\alpha_1}+\cdots+\frac{1}{z-\alpha_n}. \tag{9}$$

假定半平面 H 定义为平面上使 $\mathrm{Im}(z-a)/b<0$ 的那一部分(见第 1 章第 2.3 节)．如果 α_k 在 H 上而 z 不在，则

$$\mathrm{Im}\,\frac{z-\alpha_k}{b}=\mathrm{Im}\,\frac{z-a}{b}-\mathrm{Im}\,\frac{\alpha_k-a}{b}>0.$$

但是倒数的虚部具有相反的符号．因此，在同一假设条件下，

$$\mathrm{Im}\,b(z-\alpha_k)^{-1}<0.$$

如果这对于所有的 k 为真，则从(9)得

$$\operatorname{Im}\frac{bP'(z)}{P(z)}=\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Im}\frac{b}{z-\alpha_k}<0,$$

因此 $P'(z)\neq 0$.

这个定理的简明形式告诉我们：包含 $P(z)$ 诸零点的最小凸多边形也包含 $P'(z)$ 的所有零点.

1.4 有理函数

现在考虑作为两个多项式之商的有理函数

$$R(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}. \tag{10}$$

最主要的我们设 $P(z)$ 及 $Q(z)$ 没有公因子，因而没有公共零点. $R(z)$ 在 $Q(z)$ 的零点上将取值 ∞. 因此，我们应把它看作是扩充平面上的一个函数，而且它是连续函数. $Q(z)$ 的零点称为 $R(z)$ 的**极点**，根据这一定义可知一个极点的阶数就等于 $Q(z)$ 的对应零点的阶数.

导数

$$R'(z)=\frac{P'(z)Q(z)-Q'(z)P(z)}{Q(z)^2} \tag{11}$$

仅当 $Q(z)\neq 0$ 时存在. 不过，$R'(z)$ 作为一个由(11)式右边所定义的有理函数来看，它应与 $R(z)$ 具有同样的极，但每一个极的阶数则增加 1. 如 $Q(z)$ 具有重零点，则应注意表达式(11)并不以既约的形式出现.

如果令变数 z 及函数 $R(z)$ 都以整个扩充平面为取值范围，则可得较大的一致. 我们可以把 $R(\infty)$ 定义为 $R(z)$ 当 $z\to\infty$ 时的极限，但这一定义不能确定 ∞ 处的零点或极点的阶数. 因此，可取函数 $R\left(\frac{1}{z}\right)$ 来研究，这一函数可作为新的有理函数 $R_1(z)$，而令

$$R(\infty)=R_1(0).$$

如 $R_1(0)=0$ 或 ∞，则 ∞ 处的零点或极点的阶数就定义为 $R_1(z)$ 在原点处的零点或极点的阶数.

取
$$R(z)=\frac{a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n}{b_0+b_1z+\cdots+b_mz^m},$$

则 $$R_1(z)=z^{m-n}\frac{a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0z^m+b_1z^{m-1}+\cdots+b_m},$$
此处 z^{m-n} 或属于分子，或属于分母．因此，如 $m>n$，则 $R(z)$ 在 ∞ 处具有一个 $m-n$ 阶零点，如 $m<n$，则 ∞ 处的点是一 $n-m$ 阶极点，如 $m=n$，则

$$R(\infty)=a_n/b_n\neq 0,\ \infty.$$

现在我们可以计算一下扩充平面上零点及极点的总数．这一计算指出：零点的数目，包括 ∞ 处的零点在内，等于 m、n 两数中较大的一数，极点的数目也如此．零点和极点的这一公共数称为有理函数的**阶数**．

如 a 为任一常数，函数 $R(z)-a$ 与 $R(z)$ 具有同样多的极点，因此具有相同的阶．$R(z)-a$ 的零点是方程 $R(z)=a$ 的根，如果它的根按零点有几阶算几次，那么可得如下结果：

一个 p 阶的有理函数 $R(z)$ 具有 p 个零点和 p 个极点，每一个方程 $R(z)=a$ 恰有 p 个根．

一个一阶的有理函数是线性分式

$$S(z)=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta},$$

其中 $\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0$．这样的分式或**线性变换**将在第 3 章第 3 节详细研究．暂时我们仅指出方程 $w=S(z)$ 恰有一个根，事实上，有

$$z=S^{-1}(w)=\frac{\delta w-\beta}{-\gamma w+\alpha}.$$

变换 S 和 S^{-1} 互为逆变换．

线性变换 $z+a$ 称为一个**平移**．$1/z$ 称为一个**反演**．前者有一个不动点在 ∞，后者将 0 和 ∞ 互换．

每一个有理函数具有一个**部分分式**表示．为了导出这一表示式，我们先设 $R(z)$ 在 ∞ 具有一个极点．以 $Q(z)$ 除 $P(z)$，求其商，至余数的次数不大于分母的次数为止．则结果可写为

$$R(z)=G(z)+H(z),\tag{12}$$

式中 $G(z)$ 是一个没有常数项的多项式，$H(z)$ 在 ∞ 处是有限的．$G(z)$ 的次数是 ∞ 处极点的阶数，多项式 $G(z)$ 称为 $R(z)$ 在 ∞ 处

的奇部.

设 $R(z)$ 的有限的极点为 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_q$, 这些极点互不相同. 函数 $R\left(\beta_j+\frac{1}{\zeta}\right)$ 是 ζ 的有理函数, 具有一个极点在 $\zeta=\infty$. 应用 (12) 的分解式, 可写为

$$R\left(\beta_j+\frac{1}{\zeta}\right)=G_j(\zeta)+H_j(\zeta),$$

或者, 作变数变换 $\beta_j+\frac{1}{\zeta}=z$, 得

$$R(z)=G_j\left(\frac{1}{z-\beta_j}\right)+H_j\left(\frac{1}{z-\beta_j}\right).$$

此处 $G_j\left(\frac{1}{z-\beta_j}\right)$ 是 $\frac{1}{z-\beta_j}$ 的多项式, 不具有常数项, 称为 $R(z)$ 在 β_j 处的奇部. 函数 $H_j\left(\frac{1}{z-\beta_j}\right)$ 当 $z=\beta_j$ 时是有限的.

现在我们考察表示式

$$R(z)-G(z)-\sum_{j=1}^{q}G_j\left(\frac{1}{z-\beta_j}\right). \tag{13}$$

这是一个有理函数, 它不能有异于 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_q$ 及 ∞ 的极点. 在 $z=\beta_j$ 处, 变为无穷大的二项之差为 $H_j\left(\frac{1}{z-\beta_j}\right)$, 它具有有限的极限, 在 $z=\infty$ 时也如此. 因此, (13) 式既没有任何有限的极点, 也没有在 ∞ 的极点. 一个不具有极点的有理函数应转化为一常数, 如将这一常数并入 $G(z)$, 则

$$R(z)=G(z)+\sum_{j=1}^{q}G_j\left(\frac{1}{z-\beta_j}\right). \tag{14}$$

这一表示式是微积分学中熟知的公式, 它在积分理论中被作为一个专门的手段. 但是, 这一公式只有在引入复数以后才趋于完整.

习　题

1. 试用上述方法将下式分解为部分分式:

$$\frac{z^4}{z^3-1}, \quad \frac{1}{z(z+1)^2(z+2)^3}.$$

2．如果 Q 是一个多项式，具有不同的根 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$，而 P 是次数 $<n$ 的多项式，证明

$$\frac{P(z)}{Q(z)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{P(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)(z-\alpha_k)}.$$

3．使用上一习题的公式证明：存在唯一的一个次数 $<n$ 的多项式 P，它在点 α_k 取给定值 c_k（Lagrange 插值多项式）.

4．在单位圆周 $|z|=1$ 上有绝对值 1 的有理函数的一般形式怎样？特别，零点和极点相互间有何关系？

5．如果一个有理函数在 $|z|=1$ 上是实的，其零点和极点的分布怎样？

6．如果 $R(z)$ 是 n 阶有理函数，问 $R'(z)$ 的阶有多大和多小？

2 幂级数的基础理论

多项式和有理函数是极为特殊的解析函数. 要得到较大的类，最简易的方法是作极限. 例如，收敛级数的和就是这样一个极限. 如果级数的项都是一个变数的函数，则和也是这变数的函数，而如果项都是解析函数，那么和也将是解析的.

在项为解析函数的所有级数中，以复系数幂级数为最简单. 本节只研究幂级数的最基本的性质. 在我们还没有能证明最一般的性质（依赖于积分的那些性质）之前就作这样的介绍，其动机是出于我们需用幂级数去构造指数函数（第 3 节）.

2.1 序列

序列 $\{a_n\}_1^\infty$ 称为具有极限 A，如果对于任一 $\varepsilon>0$，存在一个 n_0，只要 $n\geqslant n_0$，便有 $|a_n-A|<\varepsilon$. 一个具有有穷极限的序列称为**收敛的**；反之，任一个不收敛的序列称为**发散的**. 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$，则说这一序列**发散到无穷**.

只有在极为特殊的情况下，才能用求出极限的办法来证明序列的收敛性，因此，极端重要的是要找出一种方法，用它可以在极限即使不能明显地确定的情况下也能证明其存在. 一个符合于

这一目的的检验法称为 Cauchy 检验法. 一个序列称为基本序列或 Cauchy 序列, 如果它满足下列条件: 给定任一 $\varepsilon>0$, 存在一个 n_0, 只要 $n\geqslant n_0$ 和 $m\geqslant n_0$, 恒有 $|a_n-a_m|<\varepsilon$. Cauchy 条件为:

一个序列收敛的充分必要条件是这一序列为一个 Cauchy 序列.

这条件的必要性是明显的. 如果 $a_n\to A$, 则可以找到一个 n_0, 使得对于 $n\geqslant n_0$, 有 $|a_n-A|<\varepsilon/2$ 成立; 对于 m、$n\geqslant n_0$, 根据三角不等式, 有 $|a_n-a_m|\leqslant|a_n-A|+|a_m-A|<\varepsilon$ 成立.

条件的充分性当然与实数的定义密切相关, 而引进实数的一个方法就是假设 Cauchy 条件是充分的. 但是在这里, 我们只用下列性质: 实数的每一个有界单调序列必有一个极限.

一个 Cauchy 序列的实部和虚部仍是 Cauchy 序列, 如果它们收敛, 则原序列也收敛. 据此, 我们只需对实序列证明其充分性. 我们回忆一下上极限和下极限的概念: 给定一个实序列 $\{\alpha_n\}_1^\infty$, 置 $a_n=\max\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$, 就是说: a_n 是数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 中的最大者. 序列 $\{a_n\}_1^\infty$ 是非降的; 因此它具有一个极限 A_1, 它可以是有穷的, 也可等于 $+\infty$. 数 A_1 称为诸数 α_n 的最小上界或上确界 (l. u. b. 或 sup); 事实上, 它是 $\geqslant$ 所有 α_n 的最小数. 在原序列中删去 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{k-1}$, 得到序列 $\{\alpha_n\}_k^\infty$, 依前法作 $\{\alpha_n\}_k^\infty$ 的最小上界 A_k. 很明显, 序列 $\{A_k\}$ 是一个非增序列, 记其极限为 A. 它可以是有穷的, 也可以是 $+\infty$ 或 $-\infty$. 在任一情况下, 记

$$A=\limsup_{n\to\infty}\alpha_n.$$

容易用上极限的性质来刻划上极限. 如果 A 是有穷的且 $\varepsilon>0$, 则存在一个 n_0, 使得 $A_{n_0}<A+\varepsilon$, 由此推知, 当 $n\geqslant n_0$ 时, 有 $\alpha_n\leqslant A_{n_0}<A+\varepsilon$. 在相反方向, 如果当 $n\geqslant n_0$ 时, 有 $\alpha_n\leqslant A-\varepsilon$, 则 $A_{n_0}\leqslant A-\varepsilon$, 但这是不可能的. 换言之, 存在一个任意大的 n, 使得 $\alpha_n>A-\varepsilon$. 如果 $A=+\infty$, 则存在任意大的 α_n; 而 $A=-\infty$ 当且仅当 $\alpha_n\to-\infty$. 总之, 在所有的情况下, 都不能有多于一个数 A 具有这些性质.

下极限可类似地定义，只要把不等式反过来．非常清楚，下极限和上极限当且仅当序列收敛到一个有穷的极限或发散到 $+\infty$ 或 $-\infty$ 时相等．上、下极限常简记为 $\overline{\lim}$ 和 $\underline{\lim}$．读者可证明下列关系：

$$\underline{\lim}\,\alpha_n+\underline{\lim}\,\beta_n\leqslant\underline{\lim}(\alpha_n+\beta_n)\leqslant\underline{\lim}\,\alpha_n+\overline{\lim}\,\beta_n,$$

$$\underline{\lim}\,\alpha_n+\overline{\lim}\,\beta_n\leqslant\overline{\lim}(\alpha_n+\beta_n)\leqslant\overline{\lim}\,\alpha_n+\overline{\lim}\,\beta_n.$$

现在回来证明 Cauchy 条件的充分性：对于 $n\geqslant n_0$，从

$$|\alpha_n-\alpha_{n_0}|<\varepsilon$$

得到
$$|\alpha_n|<|\alpha_{n_0}|+\varepsilon,$$

由此推知 $A=\overline{\lim}\,\alpha_n$ 和 $a=\underline{\lim}\,\alpha_n$ 都是有穷的．若 $a\neq A$，取

$$\varepsilon=\frac{(A-a)}{3},$$

确定相应的 n_0．由 a 和 A 的定义，对于 m、$n\geqslant n_0$，存在一个 $\alpha_n<a+\varepsilon$ 和一个 $\alpha_m>A-\varepsilon$，由是得到

$$A-a=(A-\alpha_m)+(\alpha_m-\alpha_n)+(\alpha_n-a)<3\varepsilon,$$

这与 ε 的选取相矛盾！因此，$a=A$．从而证明了序列是收敛的．

2.2 级数

Cauchy 条件的一个极简单的应用是它可以使我们从一个序列的收敛性推出另一序列的收敛性．如果两个序列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 对于所有的各对下标 m、n，恒有 $|b_m-b_n|\leqslant|a_m-a_n|$，则序列 $\{b_n\}$ 可称为是序列 $\{a_n\}$（这不是一个标准项）的短缩．在这种情形下，如果 $\{a_n\}$ 是一个 Cauchy 序列，则 $\{b_n\}$ 也是．因此，由 $\{a_n\}$ 的收敛性可推出 $\{b_n\}$ 的收敛性．

一个无穷级数就是一个形式无穷和

$$a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots. \tag{15}$$

同这一级数相连带的是它的部分和

$$s_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$$

的序列．级数(15)称为是收敛的，当且仅当其对应的部分和序列收敛，此时，序列的极限就称为级数的和．

将 Cauchy 收敛检验法应用于此级数，即得下述条件：级数(15)收敛的充要条件是：对于任一 $\varepsilon>0$，存在一个 n_0，使得对于所有的 $n>n_0$ 及 $p\geqslant 0$，有 $|a_n+a_{n+1}+\cdots+a_{n+p}|<\varepsilon$. 如 $p=0$，则得到特例 $|a_n|<\varepsilon$. 因此一个收敛级数的一般项趋于零. 这个条件是必要的，但不是充分的.

如果在级数(15)中有有限多个项被删去，则新级数将与(15)同时收敛或发散. 在收敛情况下，设从项 a_{n+1} 开始的级数之和为 R_n，则整个级数的和为 $S=s_n+R_n$.

级数(15)可与其各项的绝对值组成的级数

$$|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|+\cdots \tag{16}$$

相比较. (15)的部分和序列是对应于(16)的序列的短缩，因为

$$|a_n+a_{n+1}+\cdots+a_{n+p}|\leqslant|a_n|+|a_{n+1}|+\cdots+|a_{n+p}|.$$

因此，(16)的收敛意味着原级数(15)收敛. 一个级数的各项的绝对值所组成的级数如果收敛，则称原级数为**绝对收敛**.

2.3 一致收敛性

考察函数 $f_n(x)$ 的一个序列，先设所有函数都定义于同一集 E. 如果对于每一个 $x\in E$，值序列 $\{f_n(x)\}$ 收敛，则极限 $f(x)$ 仍是 E 上的一个函数. 按定义，如果 $\varepsilon>0$，$x\in E$，则存在一个 n_0，使当 $n>n_0$ 时有 $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$，但允许 n_0 依赖于 x. 例如，对于所有的 x，有

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)x=x$$

成立，但要在 $n\geqslant n_0$ 时有 $\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot x-x\right|=|x|/n<\varepsilon$，那就必须 $n_0>|x|/\varepsilon$. 这样一个 n_0 对每一个固定的 x 存在，但条件不能对所有的 x 同时成立.

在这种情况下，我们称序列点态收敛，但非一致收敛. 正面阐述是：**序列** $\{f_n(x)\}$ **在集** E **上一致收敛于** $f(x)$ **是指**：**对任给的** $\varepsilon>0$，**存在一个** n_0，使得对所有的 $n\geqslant n_0$ 和所有的 $x\in E$，都有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

一致收敛性的最重要推论是：

一个一致收敛的连续函数序列，其极限函数本身也是连续的.

设函数 $f_n(x)$ 在集 E 上连续，且一致收敛于 $f(x)$. 对于任一 $\varepsilon>0$，可以找到一个 n，使得对于所有的 $x\in E$，有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon/3.$$

设 x_0 是 E 的一点. 由于 $f_n(x)$ 在 x_0 连续，故可以找到 $\delta>0$，使得对于所有的 $x\in E$，只要 $|x-x_0|<\delta$，便有 $|f_n(x)-f_n(x_0)|<\varepsilon/3$. 于是，在关于 x 的同一条件下，有

$$|f(x)-f(x_0)|\leqslant|f(x)-f_n(x)|+|f_n(x)-f_n(x_0)| + |f_n(x_0)-f(x_0)|<\varepsilon,$$

这就证明了 $f(x)$ 在 x_0 连续.

在解析函数的理论中，我们将发现一致收敛性要比点态收敛性重要得多. 但是，在大多数情形下，仅在函数有定义的部分集合上收敛才是一致的.

对于一致收敛性，有类似于 Cauchy 判据的充要条件，即：

序列 $\{f_n(x)\}$ 在 E 上一致收敛的充分必要条件是：对于任一 $\varepsilon>0$，存在一个 n_0，使得对于所有的 m、$n\geqslant 0$ 和所有的 $x\in E$，有 $|f_m(x)-f_n(x)|<\varepsilon$.

条件的必要性仍是很明显的. 对于充分性，注意：根据 Cauchy 判据的原来形式可知极限函数 $f(x)$ 是存在的. 在不等式 $|f_m(x)-f_n(x)|<\varepsilon$ 中，可使 n 固定而令 m 趋于 ∞. 于是可知：对于 $n\geqslant n_0$ 和所有的 $x\in E$，有 $|f(x)-f_n(x)|\leqslant\varepsilon$，因此收敛是一致的.

在实际应用中，下面的检验法最为适用：如果函数序列 $\{f_n(x)\}$ 是常数收敛序列 $\{a_n\}$ 的一个短缩，则序列 $\{f_n(x)\}$ 一致收敛. 这里的假设条件意味着在 E 上有 $|f_m(x)-f_n(x)|\leqslant|a_m-a_n|$ 成立，因此，根据 Cauchy 条件立即推得所要的结论.

在级数的情形，这一判别准则用稍弱的形式表示时变得特别简单. 我们说函数项级数

$$f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_n(x)+\cdots$$

以正项级数 $$a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots$$

作为强级数，是指：对于某一常数 M 和所有充分大的 n，有

$$|f_n(x)|\leqslant Ma_n;$$

反过来，称第一级数为第二级数的弱级数．在这些场合，有

$$|f_n(x)+f_{n+1}(x)+\cdots+f_{n+p}(x)|\leqslant M(a_n+a_{n+1}+\cdots+a_{n+p}).$$

因此，如果强级数收敛，则弱级数一致收敛．这一条件常称为 Weierstrass M 检验法．它比较弱，只适用于绝对收敛的级数．短结的一般原理比较复杂，但应用范围较广．

习　　题

1．求证一个收敛的序列是有界的．

2．如果 $\lim_{n\to\infty} z_n=A$，证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(z_1+z_2+\cdots+z_n)=A.$$

3．证明：一个绝对收敛级数的和在级数的项重排以后并不改变．

4．详细讨论序列 $\{nz^n\}_1^\infty$ 的收敛性和一致收敛性．

5．试就 x 的实值讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{n(1+nx^2)}$ 的一致收敛性．

6．如果 $U=u_1+u_2+\cdots$，$V=v_1+v_2+\cdots$ 都是收敛级数，证明

$$UV=u_1v_1+(u_1v_2+u_2v_1)+(u_1v_3+u_2v_2+u_3v_1)+\cdots$$

只要两级数中至少有一个是绝对收敛的．（如果两级数都绝对收敛，那是容易证明的；假定第二个级数不是绝对收敛的，试作出简短证明．）

2.4　幂级数

一个幂级数具有如下的形式：

$$a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n+\cdots, \tag{17}$$

其中系数 a_n 和变量 z 都是复数．比这稍更一般些，可考虑级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(z-z_0)^n,$$

它是关于中心 z_0 的幂级数，但差异微不足道，不需在形式上这样做．

作为一个近乎平常的例子，考虑几何级数

$$1+z+z^2+\cdots+z^n+\cdots,$$

它的部分和可写成形式

$$1+z+\cdots+z^{n-1}=\frac{1-z^n}{1-z}.$$

因为$|z|<1$时$z^n\to 0$，而$|z|\geqslant 1$时$|z^n|\geqslant 1$，故可得出结论：几何级数对$|z|<1$收敛到$1/(1-z)$；对$|z|\geqslant 1$发散.

几何级数的性态是典型的．事实上，我们将发现：每个幂级数在一个圆的内部收敛；而在这一圆的外部发散，除非发生这样两种情况：或者这级数只对$z=0$收敛，或者它对z的所有的值收敛．更精确地讲，要证明下面的 Abel 定理：

定理 2 对于每个幂级数(17)，存在一个数R，$0\leqslant R\leqslant\infty$，称为它的收敛半径，具有下列性质：

(i) 对于每一个使$|z|<R$的z，级数绝对收敛．如果$0\leqslant\rho<R$，则对于$|z|\leqslant\rho$，级数的收敛是一致的.

(ii) 如果$|z|>R$，级数的项无界，因此级数是发散的.

(iii) 在$|z|<R$内，级数的和是一个解析函数．它的导数可以通过逐项微分而求得，所得到的级数与原级数有相同的收敛半径.

圆$|z|=R$称为收敛圆；至于在收敛圆的圆周上，收敛性是不明的．我们来证明：定理的断言成立，如果R按下式选取：

$$1/R=\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}. \tag{18}$$

这称为收敛半径的 Hadamard 公式.

如果$|z|<R$，则可找到ρ使$|z|<\rho<R$．于是$\frac{1}{\rho}>\frac{1}{R}$，根据上极限的定义，存在一个$n_0$，使得对于$n\geqslant n_0$，有$|a_n|^{1/n}<\frac{1}{\rho}$，$|a_n|<1/\rho^n$．于是推知：对于充分大的$n$，$|a_nz^n|<(|z|/\rho)^n$，因而幂级数(17)以一个收敛的几何级数为强级数，因此(17)收敛．为了对于$|z|\leqslant\rho<R$证明一致收敛性，选取一个ρ'，使$\rho<\rho'<R$，则对于$n\geqslant n_0$有$|a_nz^n|\leqslant(\rho/\rho')^n$．由于强级数收敛，并具有不变的项，故

由 Weierstrass M 检验法知，幂级数一致收敛.

如果 $|z|>R$，取 ρ 使 $R<\rho<|z|$. 由于 $1/\rho<1/R$，故存在任意大的 n，使得 $|a_n|^{1/n}>1/\rho$，$|a_n|>1/\rho^n$. 这样，对于无穷多个 n，有 $|a_nz^n|>(|z|/\rho)^n$，因此项是无界的.

导出级数 $\sum_1^\infty na_nz^{n-1}$ 具有相同的收敛半径，这是因为 $\sqrt[n]{n}\to 1$. 证明：置 $\sqrt[n]{n}=1+\delta_n$，则 $\delta_n>0$，并应用二项式定理

$$n=(1+\delta_n)^n>1+\frac{1}{2}n(n-1)\delta_n^2.$$

这给出 $\delta_n^2<2/n$，因此 $\delta_n\to 0$.

对于 $|z|<R$，记

$$f(z)=\sum_0^\infty a_nz^n=s_n(z)+R_n(z),$$

其中

$$s_n(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_{n-1}z^{n-1},$$
$$R_n(z)=\sum_{k=n}^\infty a_kz^k,$$

又

$$f_1(z)=\sum_1^\infty na_nz^{n-1}=\lim_{n\to\infty}s_n'(z).$$

我们来证明 $f'(z)=f_1(z)$.

考虑恒等式

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}-f_1(z_0)=\left(\frac{s_n(z)-s_n(z_0)}{z-z_0}-s_n'(z_0)\right)$$
$$+(s_n'(z_0)-f_1(z_0))+\left(\frac{R_n(z)-R_n(z_0)}{z-z_0}\right), \tag{19}$$

这里我们假定 $z\neq z_0$，并且 $|z|$、$|z_0|<\rho<R$. 最后一项可重写为

$$\sum_{k=n}^\infty a_k(z^{k-1}+z^{k-2}z_0+\cdots+zz_0^{k-2}+z_0^{k-1}),$$

因此得出结论

$$\left|\frac{R_n(z)-R_n(z_0)}{z-z_0}\right|\leqslant\sum_{k=n}^\infty k|a_k|\rho^{k-1}.$$

右端的表达式是一个收敛级数的余项. 因此可以找到 n_0，使得对于 $n\geqslant n_0$，有

$$\left|\frac{R_n(z)-R_n(z_0)}{z-z_0}\right|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

还有一个 n_1，当 $n\geqslant n_1$ 时，有 $|s_n'(z_0)-f_1(z_0)|<\varepsilon/3$. 取一固定的 $n>n_0$、n_1. 由导数的定义，可以找到 $\delta>0$，使得 $0<|z-z_0|<\delta$ 蕴涵

$$\left|\frac{s_n(z)-s_n(z_0)}{z-z_0}-s_n'(z_0)\right|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

将以上各不等式合并，由(19)，当 $0<|z-z_0|<\delta$ 时，即得

$$\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}-f_1(z_0)\right|<\varepsilon.$$

我们已经证明了 $f'(z_0)$ 存在并等于 $f_1(z_0)$.

由于以上的推理可以重复进行，所以我们实际已证明了：一个具有正的收敛半径的幂级数具有各阶导数，它们可用下列显式给出：

$$f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots,$$
$$f'(z)=a_1+2a_2z+3a_3z^2+\cdots,$$
$$f''(z)=2a_2+6a_3z+12a_4z^2+\cdots,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f^{(k)}(z)=k!a_k+\frac{(k+1)!}{1!}a_{k+1}z+\frac{(k+2)!}{2!}a_{k+2}z^2+\cdots.$$

特别是，由最后一行我们看到 $a_k=f^{(k)}(0)/k!$，幂级数变成

$$f(z)=f(0)+f'(0)z+\frac{f''(0)}{2!}z^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n+\cdots.$$

这是熟知的 Taylor-Maclaurin 展开式，是在 $f(z)$ 具有一个幂级数展开这个假设下证明的. 我们确实知道：展开式如果存在，那就是唯一确定的，但主要的部分，即每一个解析函数具有一个 Taylor 展开式仍未得到.

习　题

1. 将 $(1-z)^{-m}$（其中 m 为正整数）展为 z 的幂.

2. 将 $\frac{2z+3}{z+1}$ 展为 $z-1$ 的幂. 什么是收敛半径?

3. 求下列幂级数的收敛半径:

$$\sum n^p z^n, \quad \sum \frac{z^n}{n!}, \quad \sum n! z^n, \quad \sum q^{n^2} z^n (|q|<1), \sum z^{n!}$$

4. 如果 $\sum a_n z^n$ 有收敛半径 R, 问 $\sum a_n z^{2n}$, $\sum a_n^2 z^n$ 的收敛半径是怎样的?

5. 如果 $f(z)=\sum a_n z^n$, $\sum n^3 a_n z^n$ 是什么?

6. 如果 $\sum a_n z^n$ 和 $\sum b_n z^n$ 有收敛半径 R_1 和 R_2, 试证明 $\sum a_n b_n z^n$ 的收敛半径至少是 $R_1 R_2$.

7. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n|/|a_{n+1}|=R$, 试证明 $\sum a_n z^n$ 有收敛半径 R.

8. 对 z 的怎样的值级数

$$\sum_0^\infty \left(\frac{z}{1+z}\right)^n$$

收敛?

9. 对 z 的怎样的值级数

$$\sum_0^\infty \frac{z^n}{1+z^{2n}}$$

收敛?

2.5 Abel 极限定理

Abel 第二定理涉及一个幂级数在收敛圆圆周的一点上收敛的情形. 不失一般性, 可设 $R=1$, 并设收敛发生在点 $z=1$.

定理 3 如果 $\sum\limits_0^\infty a_n$ 收敛, 则当 z 趋近于 1 而保持 $\frac{|1-z|}{1-|z|}$ 有界时, $f(z)=\sum\limits_0^\infty a_n z^n$ 趋于 $f(1)$.

注 从几何上看, 定理中的条件意味着 z 始终位于一个顶点在 1、且关于实轴的 $(-\infty, 1)$ 部分对称而 $<180°$ 的角内. 习惯上常说: 这种趋近发生在一个 Stolz 角内.

证明 可以假设 $\sum\limits_0^\infty a_n=0$, 因为对 a_0 加一个常数就可做到这一点. 记 $s_n=a_0+a_1+\cdots+a_n$, 并利用恒等式(部分求和)

$$\begin{aligned} s_n(z) &= a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n=s_0+(s_1-s_0)z+\cdots+(s_n-s_{n-1})z^n \\ &= s_0(1-z)+s_1(z-z^2)+\cdots+s_{n-1}(z^{n-1}-z^n)+s_nz^n \end{aligned}$$

$$=(1-z)(s_0+s_1z+\cdots+s_{n-1}z^{n-1})+s_nz^n.$$

但 $s_nz^n\to 0$，因此得到表达式

$$f(z)=(1-z)\sum_0^{\infty}s_nz^n.$$

不妨设 $|1-z|\leqslant K(1-|z|)$，并设 $s_n\to 0$. 取 m 如此大，使当 $n\geqslant m$ 时，$|s_n|<\varepsilon$. 于是级数 $\sum s_nz^n$ 从 $n=m$ 的项以后的余项受几何级数 $\varepsilon\sum_m^{\infty}|z|^n=\varepsilon|z|^m/(1-|z|)<\varepsilon/(1-|z|)$ 控制. 由此得到

$$|f(z)|\leqslant|1-z|\left|\sum_0^{m-1}s_kz^k\right|+K\varepsilon.$$

取 z 充分接近于1，可使右端第一项任意小，因此得出结论：在所说的限制条件下，当 $z\to 1$ 时，$f(z)\to 0$.

3 指数函数与三角函数

纯粹从实数观点处理微积分的人不指望指数函数 e^x 和三角函数 $\cos x$、$\sin x$ 之间有任何关系. 事实上，这些函数按照不同的目的，似乎可以从完全不同的来源导出. 无疑，他会注意到这些函数的 Taylor 展开式之间的相似性，如果使用复自变量，就可以导出 Euler 公式 $e^{ix}=\cos x+i\sin x$ 作为一个正式的恒等式. 但是分析它的全部深度，则归功于 Gauss 的天才.

有了前节的准备，容易对复的 z 定义 e^z、$\cos z$ 和 $\sin z$，并导出这些函数之间的关系. 同时按指数函数的反函数可定义对数，而对数又导致复数幅角的正确定义，因此导致角的非几何定义.

3.1 指数函数

一开始，我们可以把指数函数定义为如下微分方程的解：

$$f'(z)=f(z), \tag{20}$$

初值为 $f(0)=1$. 为了求解，令

$$f(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n+\cdots,$$

$$f'(z)=a_1+2a_2z+\cdots+na_nz^{n-1}+\cdots.$$

如要(20)成立，必须 $a_{n-1}=na_n$，而初始条件给出 $a_0=1$. 由归纳法推出 $a_n=\dfrac{1}{n!}$.

将方程的解记为 e^z 或 $\exp z$，至于用哪一种记法，完全由印刷上的方便决定. 当然，我们必须证明级数

$$e^z=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots \tag{21}$$

收敛. 由于 $\sqrt[n]{n!}\to\infty$，它确实在全平面上收敛(读者自证).

作为微分方程的一个推论，e^z 满足加法定理

$$e^{a+b}=e^a\cdot e^b. \tag{22}$$

实际上，存在 $D(e^z\cdot e^{c-z})=e^z\cdot e^{c-z}+e^z(-e^{c-z})=0$. 因此 $e^z\cdot e^{c-z}$ 是常数. 令 $z=0$ 就可求得这常数的值. 于是得到结论: $e^z\cdot e^{c-z}=e^c$，令 $z=a, c=a+b$，即得(22).

注 我们使用了如下事实: 如果 $f'(z)$ 恒等于零，则 $f(z)$ 是常数. 当 f 定义在全平面上时，这肯定成立. 因为如果 $f=u+iv$，则 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}=0$，而定理的实形式表明: 在每一条水平直线和每一条铅垂直线上，f 是常数.

作为加法定理的一个特殊情形，$e^z\cdot e^{-z}=1$. 这表明 e^z 决不为零. 对于实的 x，级数展开式(21)表明: 当 $x>0$ 时 $e^x>1$，又因为 e^x 和 e^{-x} 互为倒数，故当 $x<0$ 时，$0<e^x<1$. 而级数具有实系数这一事实表明: $\exp\bar{z}$ 是 $\exp z$ 的复共轭. 因此，$|e^{iy}|^2=e^{iy}\cdot e^{-iy}=1$，$|e^{x+iy}|=e^x$.

3.2 三角函数

三角函数由下式定义:

$$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}, \qquad \sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}. \tag{23}$$

代入(21)，便知它们有展开式:

$$\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\cdots,$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots.$$

对于实的 z，它们化成熟知的 $\cos x$ 和 $\sin x$ 的 Taylor 展开式，值得注意的是：现在不用几何概念而重新定义了这些函数.

从(23)进一步得到 Euler 公式

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z$$

以及恒等式 $\qquad \cos^2 z + \sin^2 z = 1.$

还可以推得 $\qquad D\cos z = -\sin z, \quad D\sin z = \cos z.$

加法公式

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b,$$

$$\sin(a+b) = \cos a \sin b + \sin a \cos b$$

是(23)和指数函数加法定理的直接推论.

另外的几个三角函数 $\tan z$、$\cot z$、$\sec z$、$\operatorname{cosec} z$ 是次要的，它们可用 $\cos z$ 和 $\sin z$ 按惯例定义．例如，

$$\tan z = -i \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}}.$$

注意：所有的三角函数都是 e^{iz} 的有理函数.

习　题

1．求 $\sin i$、$\cos i$ 和 $\tan(1+i)$的值.

2．双曲余弦、双曲正弦定义为 $\cosh z = (e^z + e^{-z})/2$, $\sinh z = (e^z - e^{-z})/2$. 试将它们用 $\cos iz$, $\sin iz$ 表示之，导出加法公式和 $\cosh 2z$、$\sinh 2z$ 的公式.

3．试用加法公式将 $\cos(x+iy)$、$\sin(x+iy)$分为实部和虚部.

4．证明

$$|\cos z|^2 = \sinh^2 y + \cos^2 x = \cosh^2 y - \sin^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2y + \cos 2x),$$

$$|\sin z|^2 = \sinh^2 y + \sin^2 x = \cosh^2 y - \cos^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2y - \cos 2x).$$

3.3 周期性

如果 $f(z+c) = f(z)$对所有的 z 成立，我们说 $f(z)$具有周期 c. 这样，e^z 的一个周期满足 $e^{z+c} = e^z$ 或 $e^c = 1$．由此有 $c = i\omega$（ω 为实

数），我们称 ω 为 e^{iz} 的一个周期．我们将表明有几个周期，而这些周期都是一个正周期 ω_0 的整数倍．

在证明周期存在的许多方法中，我们选取下面的方法：对于 $y>0$，从 $D\sin y=\cos y\leqslant 1$ 和 $\sin 0=0$，通过积分或应用中值定理，得到 $\sin y<y$。同样，$D\cos y=-\sin y>-y$ 和 $\cos 0=1$ 给出 $\cos y>1-y^2/2$，由这又可得到 $\sin y>y-y^3/6$，最后得 $\cos y<1-y^2/2+y^4/24$．这个不等式表明 $\cos\sqrt{3}<0$，因此在 0 和 $\sqrt{3}$ 之间有一个 y_0，使得 $\cos y_0=0$．由于

$$\cos^2 y_0+\sin^2 y_0=1,$$

我们有 $\sin y_0=\pm 1$，即 $e^{iy_0}=\pm i$，因此 $e^{4iy_0}=1$．这证明 $4y_0$ 是一周期．

实际上，它是最小正周期．为了看出这一点，取 $0<y<y_0$，于是 $\sin y>y(1-y^2/6)>y/2>0$，这表明 $\cos y$ 是严格下降的．由于 $\sin y$ 是正的，并且 $\cos^2 y+\sin^2 y=1$，故知 $\sin y$ 是严格递增的，因此 $\sin y<\sin y_0=1$。双边不等式 $0<\sin y<1$ 保证了 e^{iy} 既不等于 ± 1，也不等于 $\pm i$。因此 $e^{4iy}\neq 1$，所以 $4y_0$ 实际上是最小正周期，记为 ω_0。

现在考虑一个任意的周期 ω．存在一个整数 n，使得 $n\,\omega_0\leqslant\omega<(n+1)\omega_0$．如果 ω 不等于 $n\,\omega_0$，则 $\omega-n\,\omega_0$ 将是一个 $<\omega_0$ 的正周期．但这是不可能的，所以每个周期必是 ω_0 的一个整倍数．

e^{iz} 的最小正周期记为 2π．

在证明过程中，我们证明了

$$e^{\pi i/2}=i,\quad e^{\pi i}=-1,\quad e^{2\pi i}=1.$$

这些方程说明了数 e 和 π 之间的密切关系．

当 y 从 0 增大到 2π 时，点 $w=e^{iy}$ 按正方向描出单位圆 $|w|=1$，即从 1 经 i 到 -1，再回过来经 $-i$ 到 1．对于适合 $|w|=1$ 的每一个 w，在半开区间 $0\leqslant y<2\pi$ 中，有一个且只有一个 y，使得 $w=e^{iy}$，所有这些不难从如下已知事实推出来．$\cos y$ 在"第一象限"即在 0 和 $\pi/2$ 之间是严格下降的．

从代数观点看，映照 $w=e^{iy}$ 建立了实数加法群和绝对值为 1

的复数乘法群之间的一个同态．同态的核是由所有整倍数 $2n\pi$ 形成的子群．

3.4 对数函数

与指数函数一起，我们还必须研究它的反函数——对数函数．根据定义，$z=\log w$ 是方程 $e^z=w$ 的一个根．首先，由于 e^z 总 $\neq 0$，所以数 0 没有对数．对于 $w\neq 0$，方程 $e^{x+iy}=w$ 等价于

$$e^x=|w|,\quad e^{iy}=w/|w|. \tag{24}$$

第一个方程有唯一的解 $x=\log|w|$，即正数 $|w|$ 的实对数．(24)的第二个方程的右端是绝对值为 1 的复数．因此，正象我们刚刚看到的，它在区间 $0\leqslant y<2\pi$ 中有一解且只有一解．此外，所有与这一解相差 2π 的整数倍的 y 也满足这一方程．于是，每一个不等于 0 的复数具有无穷多个对数，它们彼此相差 $2\pi i$ 的倍数．

$\log w$ 的虚部也叫 w 的幅角，记为 $\arg w$，它的几何解释是：正实轴与从 0 出发的过点 w 的半直线之间的夹角，以弧度度量．根据这一定义，幅角具有无穷多个值，它们相差 2π 的倍数，而且

$$\log w=\log|w|+i\arg w.$$

改变一下记号，如果 $|z|=r$，且 $\arg z=\theta$，则 $z=re^{i\theta}$．这一记法很方便，是经常采用的，即使在并不另外涉及指数函数时也如此．

按照习惯，一个正数的对数总是指实对数，除非另有说明．记号 a^b 总解释为 $\exp(b\log a)$，其中 a、b 都是任意复数而 $a=0$ 的情况除外．如果限制 a 为正数，则 $\log a$ 是实的，a^b 有单一值；否则，$\log a$ 是复对数，a^b 一般有无穷多个值，彼此相差 $e^{2\pi inb}$ 的倍数．a^b 取单一值的充分必要条件是 b 为整数 n，这时 a^b 可解释为 a 或 a^{-1} 的一个幂．如果 b 是一个有理数，具有既约形式 p/q，则 a^b 恰有 q 个值，并可表示成 $\sqrt[q]{a^p}$．

指数函数的加法定理明显地蕴涵着

$$\log(z_1z_2)=\log z_1+\log z_2,$$

$$\arg(z_1z_2)=\arg z_1+\arg z_2,$$

但只在这样的意义下成立，即两边表示复数的同一无穷集．如果

要将左边的一个值同右边的一个值比较，则可断定它们相差 $2\pi i$ (或 2π)的倍数．(与第1章2.1节的注比较.)

最后讨论反余弦函数，它是由解下列方程得到的：

$$\cos z=\frac{1}{2}(e^{iz}+e^{-iz})=w.$$

这是 e^{iz}的一个二次方程，有根

$$e^{iz}=w\pm\sqrt{w^2-1},$$

因此
$$z=\arccos w=-i\log(w\pm\sqrt{w^2-1}).$$

也可将这些值写成形式

$$\arccos w=\pm i\log(w+\sqrt{w^2-1}),$$

因为 $w+\sqrt{w^2-1}$ 与 $w-\sqrt{w^2-1}$ 互为倒数．$\arccos w$ 的无穷多个值反映了 $\cos z$ 的偶性和周期性．反正弦函数容易由下式定义：

$$\arcsin w=\frac{\pi}{2}-\arccos w.$$

应该指出：在复解析函数理论中，所有的初等超越函数都可用 e^z 及其逆 $\log z$ 表出．换言之，基本上只有一个初等超越函数．

习　　题

1．对于实的 y，证明在 $\cos y$ 和 $\sin y$ 的级数中，每一个余项具有与首项相同的符号(这推广了证明周期性时用到的不等式，见3.3节)．

2．证明 $3<\pi<2\sqrt{3}$．

3．对 $z=-\frac{\pi i}{2}$，$\frac{3}{4}\pi i$，$\frac{2}{3}\pi i$，求 e^z 的值．

4．要 e^z 等于 2，-1，i，$-i/2$，$-1-i$，$1+2i$；z 的值如何？

5．求 $\exp(e^z)$的实部和虚部．

6．确定 2^i、i^i、$(-1)^{2i}$ 的所有值．

7．确定 z^z 的实部和虚部．

8．用对数表示 $\arctan w$．

9．试说明在一个三角形中如何定义“角”，记住这些角位于 0 与 π 之间．根据这一定义，试证明：各角的和为 π．

10．证明二项方程 $z^n=a$ 的根是正多边形(相等的边和角)的顶点．

第3章　看成映照的解析函数

函数 $w=f(z)$ 可以看成是一个映照，它把点 z 用它的象 w 表示．本章的目的是以初等方式研究解析函数所规定的映照的一些特殊性质．

为了实现这一计划，需要导出一些具有充分普遍性的基础概念，不如此，势将被迫引进许多特定的定义，而它们之间的相互关系却是不易搞清的．由于今天的学生在他们的早期阶段就接受抽象和普遍性的教育，所以无需辩解．但是，提出这样的警告可能较为恰当，即最大可能的普遍性不应当成为一个目的．

在第一节，我们将介绍点集拓扑和度量空间的一些基础知识．由于我们主要只涉及到研究解析函数所必需的一些基本性质，所以不需作更深入的讨论．如果读者认为自己已经完全熟悉了这部分内容，那就只要读一下专门术语就可以了．

作者认为：要熟练地研究解析函数，既需要几何直觉，又需要计算技巧．为此，在与第一节仅有较少联系的第二、第三节中，特意用来讨论几何直觉，详细研究一些初等映照．在此同时，我们也试图在几何形象仅是推理的指引而不是推理的基础的地方，强调了几何思维中的严密性．

1　初等点集拓扑

拓扑学是数学的一个分支，它所研究的是与连续性直接或间接有关的一切问题．在传统上，这一名称是广义的，一般没有严格的限制．作拓扑的考察对解析函数论的基础有着极为重要的意义，我们对拓扑学作初步系统的研究就出于这样的需要．

集合论的逻辑基础属于另一种训练．我们的讨论将是非常朴素的，所有的应用都针对大家熟悉的对象．在这样一个限定的框架内，不会出现逻辑上的矛盾．

1.1 集和元素

所谓集，是指一些可识别对象的一个集体，这些对象称为集的元素．读者应当熟悉记号 $x\in X$，它表示 x 是 X 的一个元素（我们约定：用大写字母表示集；小写字母表示元素）．两个集相等，当且仅当它们有相同的元素．如果 X 的每个元素也是 y 的一个元素，则说 X 是 Y 的一个子集，这关系表为 $X\subset Y$ 或 $Y\supset X$（并不排斥 $X=Y$ 的可能性）．空集记为 $\emptyset$.

一个集合也可看成为一个空间，而把它的一个元素看成一点．一个给定空间的各个子集通常叫做点集．这给语言增加了几何味，但不应过分按字面解释．例如，我们考虑以函数为元素的空间，这时一个“点”就是一个函数．

两个集 X 与 Y 的共同元素的全体所组成的集称为 X 与 Y 的交，记为 $X\cap Y$；由或者属于 X，或者属于 Y 的元素全体组成（其中包括既属于 X 也属于 Y 的那些元素）的集称为 X 与 Y 的并，记为 $X\cup Y$．

当然，我们可以作任意多个集的交和并，这里所说任意多，其数可以是有穷，也可以是无穷．

集 X 的余集是由不在 X 中的全体点所组成，记为 $\sim X$．注意，余集与我们所讨论的点的总体有关．例如，一个实数集对于实轴来说有一个余集；而对于复平面来说有另一个余集．更一般地，如果 $X\subset Y$，可考虑相对余集 $Y\sim X$，它由 Y 中但不在 X 中的所有点组成（我们可看到：仅当 $X\subset Y$ 时，使用这一记法更清楚些）．

记住下述分配律

$$X\cup(Y\cap Z)=(X\cup Y)\cap(X\cup Z),$$
$$X\cap(Y\cup Z)=(X\cap Y)\cup(X\cap Z).$$

和 De Morgan 律

$$\sim(X \cup Y) = \sim X \cap \sim Y,$$
$$\sim(X \cap Y) = \sim X \cup \sim Y$$

是有帮助的. 这些纯粹是逻辑恒等式, 把它们推广到任意多个集合是显然的.

1.2 度量空间

对于极限和连续性的所有考察中，本质的一点是要给出"充分靠近"和"任意近"这些词的精确意义. 在实数空间 $\mathbf{R}$ 和复数空间 $\mathbf{C}$ 中, 这样的靠近程度可用一个定量关系 $|x-y|<\varepsilon$ 来表达. 例如，我们说集合 X 包含充分靠近 y 的所有 x 是指: 存在一个 $\varepsilon>0$, 使得只要 $|x-y|<\varepsilon$, 就有 $x\in X$. 类似地, X 包含任意靠近 y 的点，如果对任一 $\varepsilon>0$, 存在一个 $x\in X$, 使得 $|x-y|<\varepsilon$.

我们需要以定量的词汇来描述靠近程度的, 显然是两点之间的距离 $d(x, y)$. 集 S 称为度量空间, 如果对于每一对 $x\in S$、$y\in S$, 定义了一个非负实数 $d(x, y)$, 使下面的条件得到满足:

1. $d(x, y)=0$ 当且仅当 $x=y$;
2. $d(y, x)=d(x, y)$;
3. $d(x, z)\leqslant d(x, y)+d(y, z)$.

最后一个条件是三角形不等式.

例如, $\mathbf{R}$ 和 $\mathbf{C}$ 都是度量空间, 具有距离 $d(x, y)=|x-y|$. n 维欧几里得空间 $\mathbf{R}^n$ 是实 n 元数组

$$x=(x_1, \cdots, x_n)$$

的集合，其中的距离定义为 $d(x, y)^2=\sum_1^n (x_i-y_i)^2$. 我们曾经定义过扩充复平面中的距离为

$$d(z, z')=\frac{2|z-z'|}{\sqrt{(1+|z|^2)(1+|z'|^2)}}$$

(见第 1 章 2.4 节); 因为这表示 Riemann 面上球极影象之间的欧几里得距离, 所以三角不等式显然成立. 函数空间的一个例子

是 $C[a, b]$，即定义在区间 $a \leqslant x \leqslant b$ 上的所有连续函数的集合．如果定义其中的距离为 $d(f, g)=\max|f(x)-g(x)|$，它就成为一个度量空间．

我们引进下面的用距离表示的术语：对于任一 $\delta>0$ 和任一 $y \in S$，所有的 $x \in S$ 组成的集 $B(y, \delta)$，其中的距离 $d(x, y)<\delta$，称为中心在 y、半径为 δ 的球．也常称为 y 的 δ 邻域．邻域的一般定义如下：

定义 1 集 $N \subset S$ 称为 $y \in S$ 的一个邻域，如果它包含球 $B(y, \delta)$．

换言之，y 的一个邻域是一个集合，由所有充分靠近 y 的点组成．我们用邻域的概念来定义开集：

定义 2 一个集称为开集，如果它是它的每一个元素的一个邻域．

由这定义可解释空集是开的（条件是满足的，因为集合没有元素）．下面是三角不等式的一个直接推论：

每一个球是一个开集．

事实上，如果 $z \in B(y, \delta)$，则 $\delta'=\delta-d(y, z)>0$．由于 $d(x, z)<\delta'$ 给出 $d(x, y)<\delta'+d(y, z)=\delta$，所以三角形不等式表明 $B(z, \delta') \subset B(y, \delta)$．因此 $B(y, \delta)$ 是 z 的一个邻域，又因 z 是 $B(y, \delta)$ 的任一点，所以 $B(y, \delta)$ 是一个开集．为了强调，一个球有时称为开球，以区别于全体 $x \in S$ 组成的闭球，其中 $d(x, y) \leqslant \delta$．

在复平面上，$B(z_0, \delta)$ 是一个开圆盘，中心在 z_0，半径为 δ，它由所有适合严格不等式 $|z-z_0|<\delta$ 的复数 z 组成．我们刚证明了它是一个开集，读者可用几何术语来解释该证明．

开集的余集称为闭集．在任一度量空间中，空集和全空间是既开又闭的，可能还有别的集具有同样的性质．

开集和闭集的下列性质是基本的：

有限多个开集的交是开的．

任意多个开集的并是开的．

有限多个闭集的并是闭的．

任意多个闭集的交是闭的.

证明是很明显的,留给读者.应该指出,后两个命题可用 De Morgan 律从前两个导出来.

有许多通常使用的名词术语与开集的概念直接有关,全部列出来会增加混乱,所以我们将只限于使用下面一些:内部、闭包、边界、外部.

(i) 集 X 的内部是包含在 X 中的最大开集.它是存在的,因为它可以刻划成所有开集 $\subset X$ 的并.也可以把它说成是以 X 为邻域的点的全体所成的集合.记为 $\operatorname{Int} X$.

(ii) X 的闭包是包含 X 的最小闭集,或所有闭集 $\supset X$ 的交.一个点属于 X 的闭包,当且仅当所有它的邻域都与 X 相交.闭包常记为 X^-,有时记为 $\operatorname{Cl} X$.

(iii) X 的边界是闭包减去内部.一点属于边界,当且仅当所有它的邻域与 X 和 $\sim X$ 都相交.记为 $\operatorname{Bd} X$ 或 ∂X.

(iv) X 的外部是 $\sim X$ 的内部.它也是闭包的余集,记为 $\sim X^-$.

注意:$\operatorname{Int} X\subset X\subset X^-$,如果 $\operatorname{Int} X=X$,则 X 是开的;如果 $X^-=X$,则 X 是闭的.又 $X\subset Y$ 蕴涵着 $\operatorname{Int} X\subset\operatorname{Int} Y$,$X^-\subset Y^-$.为了方便,下面引进孤立点和聚点的概念:我们说 $x\in X$ 是 X 的一个孤立点,是指如果 x 有一个邻域,此邻域与 X 的交是点 x;一个聚点是 X^- 的一个点,但不是一个孤立点.很清楚,x 是 X 的一个聚点,当且仅当 x 的每个邻域包含 X 的无穷多个点.

习　题

1. 如果 S 是一个度量空间,具有距离函数 $d(x, y)$,试证明 S 以 $\delta(x, y)=d(x, y)/[1+d(x, y)]$ 为距离函数时也是一个度量空间.后一个空间在所有距离不超过一个固定的界的意义下是有界的.

2. 假设在同一个空间 S 上,给定了两个距离函数 $d(x, y)$ 和 $d_1(x, y)$.如果它们确定相同的开集,则称它们是等价的.试证明:如果对每一个 $\varepsilon>0$,

存在一个 $\delta>0$，使(得 $d(x, y)<\delta$ 蕴涵着 $d_1(x, y)<\varepsilon$，反之亦然，则 d 与 d_1 等价. 试验证这一条件在上题中也成立.

3. 直接应用定义证明 $|z-z_0|<\delta$ 的闭包是 $|z-z_0|\leqslant\delta$.

4. 如果 X 是一个复数集合，其实部和虚部均为有理数，问 $\operatorname{Int}X$、X^-、∂X 是什么？

5. 印刷上有时把 $\sim X$ 简写为 X'，用这一记法，$X'^{-'}$ 与 X 的关系如何？试证明 $X^{-'-'-'-'}=X^{-'-'}$.

6. 一集合称为离散的，如果它的所有点都是孤立点. 试证明 $\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$ 中的一个离散集是可数的.

7. 试证明任一集合的聚点组成一个闭集.

1.3 连通性

若 E 是度量空间 S 的任一非空子集，从 E 本身来看，可以把它考虑为 S 上具有同一距离函数 $d(x, y)$ 的一个度量空间. E 上的邻域和开集就象在任何度量空间上一样定义，但 E 上的开集当看成 S 的子集时不需要是开的. 为了避免混乱，E 上的邻域和开集经常叫做相对邻域和相对开集. 作为一个例子，我们把闭区间 $0\leqslant x\leqslant 1$ 看作 $\mathbf{R}$ 的一个子空间，于是半闭区间 $0\leqslant x<1$ 是相对开的，但在 $\mathbf{R}$ 中不是开的. 因此，当我们说一个子集 E 具有某种特定的拓扑性质时，总是指它作为子空间时具有这一性质，它的子空间拓扑就称为相对拓扑.

直观地说，一个空间是连通的，如果它是由单一的片组成. 为使这一说法有意义，必须用接近程度来定义这一陈述. 最容易的办法是给出一个反面的表征：如果存在一个划分 $S=A\cup B$，分成开子集 A 和 B，则 S 不是连通的. 应当理解 A 和 B 是不相交的、非空的. 一个空间的连通性通常以如下的方式使用：假设可以构造 S 的两个互补的开子集 A 和 B，如果 S 是连通的，那么 A 或 B 之一是空集.

子集 $E\subset S$ 称为是连通的，如果它在相对拓扑下是连通的. 不避迂腐，我们重复：

定义 3 度量空间的一个子集是连通的，如果它不能表成两

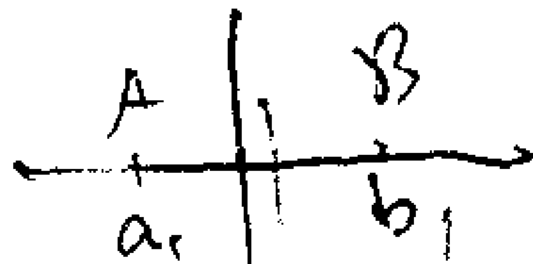
个不相交的非空的相对开集之并.

如果 E 是开的, E 的一个子集是相对开的, 当且仅当它是开的. 类似地, 如果 E 是闭的, 则相对闭就意味着闭. 因此我们可以说: 一个开集是连通的, 如果它不能分解为两个开集; 一个闭集是连通的, 如果它不能分解成两个闭集. 又, 这些集中没有一个可以是空集.

连通集的平凡例子就是空集以及只由一个点组成的任何集.

在实直线的情形, 可以命名所有的连通集. 最重要的结果是整个直线是连通的. 这实际上是实数系的基本性质之一.

一个区间由下列四种类型的不等式之一定义: $a<x<b$, $a\leqslant x<b$, $a<x\leqslant b$, $a\leqslant x\leqslant b$[1]. 对于 $a=-\infty$ 或 $b=+\infty$, 这包括半无限区间和整个直线.



定理 1 实直线的非空连通子集都是区间.

我们在这里采用经典证法之一, 它的根据是任一单调序列必有一个有穷或无穷的极限.

设实轴 $\mathbf{R}$ 用两个互不相交的闭集的并集表示为: $\mathbf{R}=A\cup B$. 如果 A 及 B 都不是空集, 则可以找到 $a_1\in A$ 及 $b_1\in B$, 不妨设 $a_1<b_1$. 现在将区间 (a_1, b_1) 平分, 平分所得的两个半区间中必有一个有左端点在 A 中, 而右端点在 B 中. 把这一区间记为 (a_2, b_2). 仿此继续进行下去, 于是可得区间套 (a_n, b_n) 的一个序列, 且 $a_n\in A$, $b_n\in B$. 序列 $\{a_n\}$ 及 $\{b_n\}$ 具有同一极限 c. 由于 A 及 B 是闭集, c 应为 A 及 B 的一个公共点. 这一矛盾说明 A 或 B 中有一个应是空集, 因此 $\mathbf{R}$ 是连通的.

上述证法稍作修改后可适用于任何区间.

在完成定理证明之前我们插入一个重要的注记. 设 E 是 $\mathbf{R}$ 的一个任意子集, 如果对于所有的 $x\in E$ 有 $\alpha\leqslant x$, 则称 α 为 E 的下界. 现在考察全体下界组成的集 A. 显然, A 的余集是开集. 至于 A 本身, 则很容易看出只要它不包含任何最大数, 它必是开

---

[1] 我们把开区间记成 (a, b), 闭区间记成 $[a, b]$; 另一种常用的记法是把开区间记为 $]a, b[$, 半闭区间记成 $]a, b]$, 或 $[a, b[$, 这里应当理解: 总是 $a<b$.

集. 由于直线是连通的, A 及其余集不能同时是开集, 除非其中之一为空集. 因此产生了三种可能: 或者 A 是空集, 或者 A 包含一个最大数, 或者 A 是整个直线. 如果存在的话, A 的最大数 α 称为 E 的最大下界(下确界), 通常, 对于 $x\in E$, 其下确界用 g. l. b. x 或 $\inf x$ 来表示. 如果 A 是空集, 则令 $\alpha=-\infty$, 如果 A 是整个直线, 则令 $\alpha=+\infty$. 根据这一约定, 实数的每一个集具有唯一确定的下确界; 很清楚, 为要 $\alpha=+\infty$, 必须而且只须 E 为空集. 对应地, 可定义最小上界 (上确界)[1], 对于 $x\in E$, 我们以 l. u. b. x 或 $\sup x$ 表示上确界.

现在再回到定理的证明上来, 设 E 是一连通集, 具有下确界 a 及上确界 b. E 的所有点包括极限点, 都位于 a 与 b 之间. 设区间 $a<\xi<b$ 中有一点 ξ 不属于 E. 则开集 $x<\xi$ 及 $x>\xi$ 将覆盖 E, 而由于 E 是连通的, 故这两个开集之一将不与 E 相交. 不妨设 E 中没有点位于 ξ 的左边. 在这种情况下, 如果 ξ 是下界, 就将与 a 是下确界相矛盾. 相反的假设也将导致同样的矛盾, 因此可得结论: ξ 必属于 E. 由是可知 E 是一个开的、闭的或半闭的区间, 端点为 a 和 b, 而 $a=-\infty$ 和 $b=+\infty$ 的情形也包括在内.

在证明过程中, 我们引入了下确界与上确界的概念. 如果集是闭的而且上确界与下确界均为有穷, 则它们必属于集, 此时就把下确界与上确界分别称为极小与极大. 为了确信界为有穷, 必须先知道集为不空而且具有某一有穷的下界与某一有穷的上界. 换句话说, 这时的集必位于一个有穷的区间之内; 这样的集称为有界集. 于是就证明了下面的定理:

定理 2 实数的任一不空有界闭集必有一个极小与一个极大.

平面上连通集的结构就不象数轴上那样简单, 但下面关于连通开集的特性基本上包括了我们所需的全部信息.

定理 3 平面上一个不空开集是连通的, 其充要条件为: 该集中的任意两点可用整个位于该集内的折线连接起来.

---

[1] 序列的上确界已在第 2 章 2.1 节引入.

连接折线的概念比较简单，这里用不着再作形式定义了。

现在先证条件的必要性：设 A 为一连通开集，选定一点 $a\in A$. 将 A 中的点加以区分，凡可以用 A 中的折线与 a 相连的点的全体记为 A_1，而不能用 A 中的折线与 a 相连的点的全体记为 A_2. 现在我们来证明 A_1、A_2 均为开集. 首先，如设 $a_1\in A_1$，则存在 a_1 的一个邻域 $|z-a_1|<\varepsilon$ 包含于 A 中. 这一邻域中的所有点均可用一线段与 a_1 相连，由此可用折线与 a 相连. 故知整个邻域包含于 A_1 之内，从而 A_1 是开集. 其次，如 $a_2\in A_2$，令 $|z-a_2|<\varepsilon$ 为包含于 A 中的一个邻域. 如果这一邻域中有一点可用一折线与 a 相连，则 a_2 必可用一线段与该点相连，从此可与 a 相连. 但这与 A_2 的定义矛盾，故知 A_2 是开集. 由于 A 是连通的，故其子集 A_1、A_2 中必有一个是空集. 但 A_1 包含点 a；因此 A_2 是空集，从而所有的点都可与 a 相连. 最后，A 中的任意两点可以经由 a 相连，这就证明了条件是必要的.

在今后，我们甚至可把任意两点用边平行于坐标轴的折线来连接. 其证明与上述相同.

为了证明条件的充分性，设 A 可用 $A=A_1\cup A_2$ 即两个互不相交的开集的并来表示. 选取 $a_1\in A_1$、$a_2\in A_2$，并设这两点可用 A 中的折线来连接. 于是这折线必有一段连接 A_1 中的一点到 A_2 中的一点，据此我们只要研究 a_1、a_2 可用一线段来连接的情形就够了. 这一线段的参数表示式为 $z=a_1+t(a_2-a_1)$，此处参数 t 取值于区间 $0\leqslant t\leqslant 1$. 在区间 $0<t<1$ 中，分别与 A_1 及 A_2 中的点对应的两个子集显然是开集、互不相交而且不空. 但这与区间的连通性矛盾，于是证明了条件的充分性.

这定理容易推广到 $\mathbf{R}^n$ 和 $\mathbf{C}^n$.

定义 4 一个非空的连通开集称为一个域.

根据定理 3 可知：整个平面、一个开圆盘 $|z-a|<\rho$ 和一个半平面都是域. 同样，$\mathbf{R}^n$ 中的任一 δ 邻域也是一个域. 域是一个开区间的多维模拟. 一个域的闭包称为闭域. 很明显，不同的域可以有相同的闭包.

通常，例如在证明过程中，我们需要分析那些定义得非常含混的集的结构．在这种情况下，第一步就是把所考察的集分解成它的若干个最大连通分集 (component)．这里所谓分集，就是一个连通子集，它不包含在任何更大的连通子集中．

定理 4 每一个集具有唯一的分成分集的分解．

如果 E 是给定的集，考虑一点 $a\in E$，并设 $C(a)$ 表示 E 的包含 a 的所有连通子集的并．由于由单一的点 a 组成的集是连通的，所以 $C(a)$ 肯定包含 a．如果能证明 $C(a)$ 是连通的，则它是一个最大的连通集，换言之，是一个分集．但是任何两个分集或是不相交的，或是全同的，而这是要我们证明的．事实上，如果 $c\in C(a)\cap C(b)$，则由 $C(c)$ 的定义以及 $C(a)$ 的连通性，有 $C(a)\subset C(c)$．因此 $a\in C(c)$，由同一理由，$C(c)\subset C(a)$，所以事实上 $C(a)=C(c)$．类似地，$C(b)=C(c)$，因此 $C(a)=C(b)$．我们称 $C(a)$ 是 a 的分集．

假定 $C(a)$ 不是连通的，则我们要找相对开集 A、$B\neq\emptyset$，使得 $C(a)=A\cup B$，$A\cap B=\emptyset$．我们可以假设 $a\in A$，而 B 包含一点 b．由于 $b\in C(a)$，所以存在一个连通集 $E_0\subset E$，它包含 a 和 b．表示 $E_0=(E_0\cap A)\cup(E_0\cap B)$ 将是分解为相对开子集的一个分解，又因为 $a\in E_0\cap A$，$b\in E_0\cap B$，没有一个部分是空的．这是一个矛盾，因此 $C(a)$ 是连通的．

定理 5 在 $\mathbf{R}^n$ 中，任何开集的分集是开的．

这是下列事实的推论：在 $\mathbf{R}^n$ 中 δ 邻域都是连通的．考察 $a\in C(a)\subset E$．如果 E 是开的，它包含 $B(a,\delta)$，因为 $B(a,\delta)$ 是连通的，所以 $B(a,\delta)\subset C(a)$．因此 $C(a)$ 是开的．更一般些，论断对任何局部连通的空间 S 是正确的，这是指：点 a 的任何邻域包含 a 的一个连通邻域．此证明留给读者．

此外，在 $\mathbf{R}^n$ 的情形，可以得出结论：分集的数目是可数的．为了看出这一点，注意每一个开集必须包含具有有理坐标的点．而具有有理坐标的点集是可数的，这样，就可表成序列 $\{p_k\}$．对每个分集 $C(a)$，确定最小的 k，使得 $p_k\in C(a)$．不同的 k 对应不同

的分集．于是得出结论：分集与自然数子集成一一对应，因此分集是可数的．

例如，$\mathbf{R}$ 的每一开子集是不相交开区间的可数并集．

又，可以分析一下证明，从而得到更一般的结果．我们说集 E 在 S 中是稠密的，如果 $E^{-}=S$；一个度量空间是可分的，如果存在一个可数子集，它在 S 中稠密．这样就得到下列结果：

在局部连通可分空间中，每个开集是不相交区域的可数并．

习　题

1．如果 $X\subset S$，试证明 X 的相对开(闭)子集就是那样的集合，它们可以表为 X 与 S 的一个开(闭)子集的交．

2．试证明：两个区域的并是一个区域，当且仅当它们有一个公共点．

3．证明连通集的闭包是连通的．

4．设 A 是点 $(x, y)\in\mathbf{R}^2$，且 $x=0$、$|y|\leqslant 1$ 的集合，并设 B 是 $x>0$、$y=\sin 1/x$ 的集合．问 $A\cup B$ 是不是连通的？

5．设 E 是点 $(x, y)\in\mathbf{R}^2$ 的集合，适合 $0\leqslant x\leqslant 1$，对于某一正整数 n，或者 $y=0$，或者 $y=1/n$．问 E 的分集是什么？它们是否全是闭的？它们是相对开的吗？试验证 E 不是局部连通的．

6．证明闭集的各分集都是闭的(应用第 3 题)．

7．如果集合的所有点是孤立的，则称它为离散的．试证明可分度量空间中的一个离散集是可数的．

1.4 紧致性

收敛序列和 Cauchy 序列的概念在任何度量空间中显然都是有意义的．事实上，如果 $d(x_n, x)\to 0$，我们就可以说 $x_n\to x$；如果 $d(x_n, x_m)$ 当 n、$m\to\infty$ 时趋于零，则说 $\{x_n\}$ 是一个 Cauchy 序列．很明显，每个收敛序列是 Cauchy 序列．对于 $\mathbf{R}$ 和 $\mathbf{C}$，我们已经证明了它的逆命题是成立的，即每个 Cauchy 序列是收敛序列(第 2 章第 2.1 节)．不难看出，这一性质可推广到任何 $\mathbf{R}^n$．鉴于这个性质的重要性，我们给它一个特殊的名称．

定义 5 一个度量空间称为是完备的，如果每个 Cauchy 序列是收敛的.

如果一个子集被看作一个子空间时是完备的，则称它为完备的. 读者不难证明：一个度量空间的完备子集是闭的；一个完备空间的闭子集是完备的.

现在我们要介绍紧致性这个较强的概念. 它比完备性强，是指每个紧致空间或集合必是完备的，但反之不真. 事实上，**R** 和 **C** 的紧致子集都是有界闭集. 根据这一结果，似乎可以删掉紧致性这个概念，至少对于本书的目的是如此. 但这是不明智的. 因为这样做就意味着要我们闭眼不看实数或复数的有界闭集的最显著性质. 结果是我们必须在许多不同的方面基本上重复相同的证明.

紧致性有几个等价的特性描述，至于选用哪一个作为定义，则根据各人的爱好而定. 无论怎样做，未入门的读者总会感到有些模糊，因为他还不能识别定义的目的. 这是不足为奇的，因为要使数学家对最好的方法表示赞同，经历了整整一代人. 目前的一致意见是：最好注意集中在可以使一个给定的集合能够用开集来覆盖的不同方法上.

我们说开集族是集合 X 的一个开覆盖，如果 X 包含在这些开集的并集之中. 一个子覆盖就是具有同一性质的开集族的一个子集. 一个有穷覆盖是由有限数的集合组成的一个覆盖. 紧致性的定义如下：

定义 6 集 X 是紧致的，当且仅当 X 的每一个开覆盖包含一个有穷的子覆盖.

在这里，我们把 X 设想为度量空间 S 的一个子集，并用 S 的开集来对它进行覆盖. 但如果 U 是 S 中的一个开集，则 $U\cap X$ 是 X 的一个开子集（一个相对开集）；反之，X 的每个开子集可以表成这一形式（§ 1.3 习题 1）. 因此，我们的定义究竟是对全空间阐述的，还是对一个子集阐述的，是没有差别的.

在定义中阐明的性质常称为 Heine-Borel 性质. 它的重要性

在于：用开覆盖来阐述，有许多证明变得特别简单.

我们首先证明每个紧致空间必是完备的. 设 X 是紧致的，并设 $\{x_n\}$ 是 X 中的一个 Cauchy 序列. 如果 y 不是 $\{x_n\}$ 的极限，则存在一个 $\varepsilon>0$，使得对无穷多个 n，有 $d(x_n, y)>2\varepsilon$. 确定 n_0，使当 m、$n\geqslant n_0$ 时，$d(x_m, x_n)<\varepsilon$. 选取一个固定的 $n\geqslant n_0$，使 $d(x_n, y)>2\varepsilon$. 则对所有的 $m\geqslant n_0$，有 $d(x_m, y)\geqslant d(x_n, y)-d(x_m, x_n)>\varepsilon$. 于是推知：$\varepsilon$ 邻域 $B(y, \varepsilon)$ 只含有限多个 x_n（更好地说，只对有限多个 n，包含 x_n）.

现在考虑只含有限多个 x_n 的所有开集 U 组成的集族. 若 $\{x_n\}$ 不收敛，则据上面的理由，得知这一集族是 X 的一个开覆盖. 因此它必含一个有穷的子覆盖，由 $U_1, \cdots, U_N$ 组成. 但这显然不可能，因为每个 U_i 只含有限多个 x_n，而这将意味着给定的序列是有穷的.

其次，一个紧致集必是有界的（一个度量空间是有界的，如果所有距离都不超过一个有穷的界）. 为了看出这一点，选一点 x_0 并考虑所有的球 $B(x_0, r)$. 这些球组成 X 的一个开覆盖. 如果 X 是紧致的，它将包含一个有穷的子覆盖；换言之，$X\subset B(x_0, r_1)\cup\cdots\cup B(x_0, r_m)$，这意味着 $X\subset B(x_0, r)$，其中 $r=\max(r_1, \cdots, r_m)$. 由此推知：对于任何 x、$y\in X$，都有 $d(x, y)\leqslant d(x, x_0)+d(y, x_0)<2r$，这就证明了 X 是有界的.

但是，有界性并不是我们所能证明的全部内容. 为方便起见，我们定义一个较强的性质，称为全有界性.

定义 7 集 X 称为全有界的，如果对于任一 $\varepsilon>0$，可用有穷多个半径为 ε 的球覆盖 X.

这对任何紧致集来说肯定是对的. 因为半径为 ε 的球的全体是一个开覆盖，而紧致性蕴涵着可以抽取有穷多个来覆盖 X. 注意：一个全有界集必是有界的，因为如果

$$X\subset B(x_1, \varepsilon)\cup\cdots\cup B(x_m, \varepsilon),$$

则 X 的任两点之间的距离小于 $2\varepsilon+\max d(x_i, x_j)$.（上面关于任一紧致集是有界集这一证明现在变成多余的了.）

我们已经证明了下列定理的一部分：

定理6 一个集是紧致的，当且仅当它是完备且全有界的.

为了证明这个定理的另一部分，假定度量空间 S 是完备且全有界的. 假设存在一个开覆盖，它不包含任何有穷子覆盖，记 $\varepsilon_n=2^{-n}$. 我们知道 S 可用有穷多个 $B(x, \varepsilon_1)$ 覆盖. 如果每一个都有一个有穷的子覆盖，则 S 亦然；因此存在一个球 $B(x_1, \varepsilon_1)$，它并不容有一个有穷的子覆盖. 由于 $B(x_1, \varepsilon_1)$ 本身是全有界的，所以可找到一个 $x_2\in B(x_1, \varepsilon_1)$，使得 $B(x_2, \varepsilon_2)$ 没有有穷的子覆盖❶. 如何使构造继续下去，那是清楚的：我们得到一个序列 x_n，它具有性质：$B(x_n, \varepsilon_n)$ 没有有穷子覆盖，并且 $x_{n+1}\in B(x_n, \varepsilon_n)$. 后一性质意味着 $d(x_n, x_{n+1})<\varepsilon_n$，因此 $d(x_n, x_{n+p})<\varepsilon_n+\varepsilon_{n+1}+\cdots+\varepsilon_{n+p-1}<2^{-n+1}$. 这说明 x_n 是一个 Cauchy 序列. 它收敛到极限 y，而这个 y 属于给定的覆盖中的开集之一 U. 由于 U 是开的，它包含球 $B(y, \delta)$. 取如此大的 n，使得 $d(x_n, y)<\delta/2$ 和 $\varepsilon_n<\delta/2$，于是 $B(x_n, \varepsilon_n)\subset B(y, \delta)$，因为 $d(x, x_n)<\varepsilon_n$ 蕴涵着 $d(x, y)\leqslant d(x, x_n)+d(x_n, y)<\delta$. 所以 $B(x_n, \varepsilon_n)$ 有一个有穷的子覆盖，它由单个集 U 组成. 这是一个矛盾，因此 S 具有 Heine-Borel 性质.

推论 **R** 或 **C** 的一个子集是紧致的，当且仅当它是闭且有界的.

我们已经提及过这一特殊的推论. 在一个方向，结论是显然的：我们知道一个紧致集是有界且完备的；但是 **R** 和 **C** 都是完备的，而一个完备空间的完备子集都是闭的. 对于相反的结论，需要证明 **R** 或 **C** 中每一个有界集是全有界的. 我们就 **C** 的情形来讨论. 如果 X 是有界的，那么它包含在一个圆盘中，因而包含在一个正方形中. 这个正方形可以分成有穷多个边长任意小的正方形，而这些小正方形又可用半径任意小的圆盘来覆盖，这证明了 X 是全有界的，除了一个不应掩盖的小点之外. 当把定义 7 应用到子集 $X\subset S$ 上时，多少有点不明确，因为 ε 邻域究竟是关于 X 的还是关于 S 的并不清楚；就是说：我们是否要求它们的中心落在 X

❶ 这里用了这样的事实：一个全有界集的任一子集是全有界的，读者可证明之.

上是不明确的. 看来这是没有什么作用的. 事实上，假设已用中心不一定落在 X 上的 ε 邻域覆盖了 X. 如果这样一个邻域不与 X 相交，那么它是多余的，可以弃去. 如果它确实包含 X 的一个点，那么就可用那一点的一个 2ε 邻域代替它，并得到了一个用中心在 X 上的一些 2ε 邻域覆盖的有穷覆盖. 根据这一理由，不明确仅是表观上的，因此关于 **C** 的有界子集都是全有界的这个证明是正确的.

紧致性还有第三个特性描述，它与极限点（有时称为聚点值）的概念有关：我们称 y 是序列 $\{x_n\}$ 的一个极限点，如果存在一个子序列 $\{x_{n_k}\}$ 收敛于 y. 一个极限点几乎与点 x_n 组成的集合的一个聚点相同，区别仅在于一个序列可以允许同一点重复出现. 若 y 是一个极限点，则 y 的每一邻域包含无穷多个 x_n. 反之亦然. 事实上，设 $\varepsilon_k\to 0$. 如果每个球 $B(y,\ \varepsilon_k)$ 包含无穷多个 x_n，则可归纳地选取下标 n_k，使得 $x_{n_k}\in B(y,\ \varepsilon_k)$ 且 $n_{k+1}>n_k$，显然 $\{x_{n_k}\}$ 收敛于 y.

定理 7 一个度量空间是紧致的，当且仅当每个无穷序列具有一个极限点.

这一定理常称为 Bolzano-Weierstrass 定理. 原来的陈述是这样的：复数的每个有界序列具有一个收敛的子序列. 它之所以被认为是一个重要定理，是由于它在解析函数论中有重要作用.

证明的第一部分是以前一个论据的重复. 如果 y 不是 $\{x_n\}$ 的一个极限点，则 y 有一个只含有穷多个 x_n 的邻域. 如果没有极限点，则只含有穷多个 x_n 的那些开集组成一个开覆盖. 在紧致的情形，我们可选取一个有穷的子覆盖，这样可推知序列是有穷的. 以前我们使用这一理由是证明一个紧致空间是完备的. 实质上是证明了每个序列具有一个极限点，然后注意到，具有一个极限点的 Cauchy 序列必是收敛的. 为了顺理成章，最好在证明定理 6 之前，先证明定理 7. 但我们尽早强调全有界性的重要性.

剩下要证明其逆命题. 首先，Bolzano-Weierstrass 性质显然意味着完备性. 事实上，刚才指出：一个具有极限点的 Cauchy 序

列必是收敛的. 现在设空间不是全有界的, 则存在一个 $\varepsilon>0$, 使得空间不能用有穷多个 ε 邻域来覆盖. 我们作序列 $\{x_n\}$ 如下: x_1 是任意的, 当 $x_1, \cdots, x_n$ 选定时, 选 x_{n+1} 使得它不落在 $B(x_1, \varepsilon)\cup B(x_2, \varepsilon)\cup\cdots\cup B(x_n, \varepsilon)$ 中. 这总是可能的, 因为这些邻域并不覆盖全空间. 但很明显 $\{x_n\}$ 没有收敛的子序列, 因为对于所有的 m 和 n, 都有 $d(x_m, x_n)>\varepsilon$. 由此得到结论: Bolzano-Weierstrass 性质意味着全有界性. 考虑到定理 **6**, 这就是我们所要证明的.

读者应对下列事实作思考: 我们介绍了紧致性的三种特性描述, 它们的逻辑等价性并不是明显的. 应当看清, 这类结果对于尽可能简明地介绍证明来说是具有特殊价值的。

习　题

1. 试给出下列事实的另一证明: 复数的每个有界序列具有一个收敛的子序列(例如运用下极限).

2. 证明 Heine-Borel 性质也可表达如下: 彼此不交的闭集, 其每一个集族包含一个有穷的子族, 它们彼此不相交.

3. 用紧致性证明实数的一个有界闭集具有一个极大值.

4. 如果 $E_1\supset E_2\supset E_3\supset\cdots$ 是不空紧致集的一个递减序列, 则交 $\bigcap_1^\infty E_n$ 非空 (Cantor 引理). 用例子说明: 如果集合仅仅是闭的, 则上面结论不一定成立.

5. 设 S 是实数的所有序列 $x=\{x_n\}$ 的集合, 使得 x_n 只有有穷多个不为 0. 定义 $d(x, y)=\max|x_n-y_n|$. 问这个空间是完备的吗? 证明 δ 邻域不是全有界的.

1.5 连续函数

考虑定义在度量空间 S 上而取值于另一度量空间 S' 上的函数 f. 函数也常称为映照: 称 f 将 S 映入 S', 记为 $f:S\to S'$. 很自然地, 我们主要讨论实值或复值函数; 后者偶然也可取值于扩充的复平面, 这时通常的距离就要换为 Riemann 球面上的距离了.

空间 S 是函数的定义域. 当然可以考虑只以 S 的一个子集为定义域的函数 f, 这时, 把定义域看作一个子空间. 在大多数情形, 我们对 S 上的函数与它限制于一个子集上的约束不作区别, 用同一记号表示之. 如果 $X\subset S$, 则当 $x\in S$ 时, $f(x)$ 的值的全体称为 X 在 f 下的象, 记为 $f(X)$. $X'\subset S'$ 的原象 $f^{-1}(X')$ 是由使 $f(x)\in X'$ 的所有 $x\in S$ 组成. 注意 $f(f^{-1}(X'))\subset X'$, $f^{-1}(f(X))\supset X$.

一个连续函数的定义实际上不需修改: 我们说 f 在 a 连续, 是指: 对任一 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得 $d(x, a)<\delta$ 蕴涵 $d'(f(x), f(a))<\varepsilon$. 我们主要讨论在定义域的所有点上都连续的函数. 下面的特性刻划是定义的直接推论:

一个函数是连续的, 必须而且只须每一个开集的原象是开的.

一个函数是连续的, 必须而且只须每一个闭集的原象是闭的.

如果 f 不是定义在全部 S 上, 则当涉及原象时, "开"和"闭"当然应该相对于 f 的定义域来理解. 此处必须特别注意的是: 这些性质仅对原象成立; 而对直接的象不成立. 例如将 $\mathbf{R}$ 映入 $\mathbf{R}$ 的映照 $f(x)=x^2/(1+x^2)$ 具有象 $f(\mathbf{R})=\{y;\ 0\leqslant y<1\}$, 它既不是开的, 也不是闭的. 在这个例子中, $f(\mathbf{R})$ 不是闭的, 因为 $\mathbf{R}$ 不是紧致的. 事实上, 有下列定理成立:

定理 8 在连续映照下, 任一紧致集的象必是紧致的, 因而是闭的.

设 f 在紧致集 X 上定义并连续. 考虑 $f(X)$ 的一个由开集 U 组成的覆盖. 原象 $f^{-1}(U)$ 都是开的, 并组成 X 的一个覆盖. 由于 X 是紧致的, 故可选取一个有穷的子覆盖: $X\subset f^{-1}(U_1)\cup\cdots\cup f^{-1}(U_m)$. 由此推知 $f(X)\subset U_1\cup\cdots\cup U_m$, 这就证明了 $f(X)$ 是紧致的.

推论 紧致集上一个实值连续函数必有一个极大值及一个极小值.

象是 $\mathbf{R}$ 的一个有界闭子集. 极大值和极小值的存在可从定理 2 推出来.

定理 9 在连续映照下，任一连通集的象是连通的.

我们假定 f 在全空间 S 上定义并连续，并设 $f(S)$ 是 S' 的全体. 设 $S'=A\cup B$，其中 A 和 B 是不相交的开集. 那么

$$S=f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)$$

是 S 表为不相交的开集之并的一个表示. 若 S 是连通的，即 $f^{-1}(A)=\emptyset$ 或 $f^{-1}(B)=\emptyset$，因而 $A=\emptyset$ 或 $B=\emptyset$. 从而得出结论：S' 是连通的.

一个典型的应用是断言：在连通集上连续的非零实值函数或者恒正或者恒负. 事实上，象是连通的，因此是一个区间. 但是一个包含正数和负数的区间必包含零.

映照 $f:S\to S'$ 称为是一对一的，如果 $f(x)=f(y)$ 仅当 $x=y$ 时成立；如果 $f(\mathbf{S})=\mathbf{S}'$，则称为是映上的❶. 同时具有这两种性质的映照具有逆 f^{-1}，定义在 S' 上，满足 $f^{-1}(f(x))=x$ 和 $f(f^{-1}(x'))=x'$. 在这一情况下，如果 f 和 f^{-1} 都连续，就说 f 是一个拓扑映照或同胚映照. 一个集的一种性质如果为这个集的所有拓扑映象所共有，则称这一性质是一种拓扑性质. 例如已经证明的紧致性和连通性就都是拓扑性质（定理 8 和 9）. 在这方面应当指出，成为一个开子集的这一性质并不是拓扑性质. 如果 $X\subset S$ 和 $Y\subset S'$，并且 X 同胚映为 Y，那么就没有理由说明 X 与 Y 为什么同时是开的. 看来当 $S=S'=\mathbf{R}^n$（域的不变性）时这是对的，但这是一个深刻的定理，我们不需要.

一致连续的概念今后将经常用到. 一般地说：一个条件，如果可以用不含某一参数的不等式来表示，那么就称这个条件关于这一参数一致地成立. 据此，如果对于任一 $\varepsilon>0$，存在一个 $\delta>0$，使对所有的点对 (x_1, x_2)，只要 $d(x_1, x_2)<\delta$，就有 $d'(f(x_1), f(x_2))<\varepsilon$（这里应强调的是：$\delta$ 不能依赖于 x_1），则称函数 f 在 X 上一致连续.

定理 10 在紧致集上，每一个连续函数必是一致连续的.

❶ 这些语言上笨拙的术语可以换为内射 (injective)（对于一对一）和上射 (surjective)（对于映上）. 具有这两种性质的映照称为双射 (bijective).

这定理的证明在使用 Heine-Borel 性质的方法中是典型的. 设 f 在紧致集 X 上是连续的. 对每一个 $y \in X$, 存在一个球 $B(y, \rho)$, 使当 $x \in B(y, \rho)$ 时有 $d'(f(x), f(y)) < \varepsilon/2$ (这里 ρ 可以依赖于 y). 考虑 X 的由小球 $B(y, \rho/2)$ 组成的覆盖. 存在一个有穷的子覆盖: $X \subset B(y_1, \rho_1/2) \cup \cdots \cup B(y_m, \rho_m/2)$. 设 δ 是数 $\rho_1/2, \cdots, \rho_m/2$ 中最小者, 并设 $d(x_1, x_2) < \delta$. 存在一个 y_k 使 $d(x_1, y_k) < \rho_k/2$, 并得到 $d(x_2, y_k) < \rho_k/2 + \delta \leqslant \delta_k$. 因此 $d'(f(x_1), f(y_k)) < \varepsilon/2$, $d'(f(x_2), f(y_k)) < \varepsilon/2$, 从而得到所要的 $d'(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$.

在非紧致的集上, 有些连续函数是一致连续的; 有些则不是. 例如, 函数 z 在整个复平面上是一致连续的, 但函数 z^2 就不然.

习　　题

1. 试作一个将开圆盘 $|z| < 1$ 映成整个平面的拓扑映照.

2. 试证明: 与一个开区间拓扑等价的实轴的一个子集是一个开区间. (考虑移去一点的效果).

3. 试证明: 一个紧致空间的每一个连续一对一映照是拓扑映照 (证明闭集映成闭集.)

4. 设 X 与 Y 是完备度量空间中的紧致集, 试证明: 存在 $x \in X$, $y \in Y$, 使得 $d(x, y)$ 是一个极小值.

5. 下列函数中哪几个是在整实轴上一致连续的:

$$\sin x, \quad x \sin x, \quad x \sin(x^2), \quad |x|^{\frac{1}{2}} \sin x ?$$

1.6 拓扑空间

把接近程度用距离来表出是不必要的, 而且常常是不方便的. 细心的读者可能已注意到前几节中的大多数结果都是通过开集来阐述的. 确实, 我们已用了距离定义开集, 不过这样做实在没有强有力的理由. 如果我们决定把开集看作基本的对象, 那就必须假设一些它们应该满足的公理. 下面几条公理引导到普遍可接受

的拓扑空间的定义：

定义 8 一个集 T 连同它的一族称为开集的子集是一个拓扑空间，如果它们满足下列条件：

（i）空集 $\emptyset$ 与整个空间 T 都是开集；

（ii）任何两个开集的交是一个开集；

（iii）任意多个开集的并是一个开集.

我们可看到这一术语与我们早先关于度量空间开子集的定义是相容的. 事实上，性质 (ii) 和 (iii) 要着重强调，而 (i) 是平凡的.

闭集是开集的余集，因此怎样定义内部、闭包、边界等等就立即清楚了. 邻域是可以避免的，但它们却是很方便的：如果存在一个开集 U，使得 $x\in U$ 且 $U\subset N$，则 N 是 x 的一个邻域.

连通性纯粹是用开集定义的. 因此，这定义转到拓扑空间后，各定理仍保持正确. Heine-Borel 性质也是只涉及开集的一种性质. 所以说紧致拓扑空间是完全有意义的. 但是，定理 6 变为无意义，定理 7 变为不正确.

实际上，我们遇到的第一个严重困难是收敛序列. 定义是清楚的：我们说 $x_n\to x$，如果 x 的任一邻域包含除有穷个之外的全部 x_n. 但如果 $x_n\to x$ 且 $x_n\to y$，并不能证明 $x=y$. 如果引进一条新的公理，把拓扑空间刻划为 Hausdorff 空间，那么这一棘手的情况就可改善了.

定义 9 一个拓扑空间称为 Hausdorff 空间，如果它的任意两个相异的点包含在不相交的开集之中.

换句话说，如果 $x\neq y$，则就要求存在开集 U 与 V，使得 $x\in U$，$y\in V$，并且 $U\cap V=\emptyset$. 这一条件成立时，一个收敛序列的极限显然是唯一的. 在本书中，我们没有机会考虑非 Hausdorff 空间的空间.

这里无法给出一些不能从一个距离函数导出的拓扑的例子. 这样的例子是非常复杂的，也不是本书讨论的目的. 要记住：在实际不需要距离的场合引进一个距离可能是不自然的. 收进这一节

的理由是要提醒读者，距离并不是必需的.

2 共 形 性

现在回到所有函数和变数都限于实数或复数的原来情况．度量空间的作用将变得相当小：我们实际需要的仅是连通性和紧致性的某些简单应用.

整个这一节主要是描述性的．重点是导数存在的几何推论.

2.1 弧与闭曲线

平面中弧 γ 的方程用参数形式来表示最为方便，那就是 $x=x(t)$, $y=y(t)$，其中 t 取值于区间 $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$，且 $x(t)$、$y(t)$ 都是连续函数．我们也可用复数记法 $z=z(t)=x(t)+iy(t)$，这一记法有若干方便的地方．习惯上也常把弧 γ 与 $[\alpha,\beta]$ 的连续映照等同起来．按照这种习惯，最好把映照记为 $z=\gamma(t)$.

把一段弧看作是一个点集，那么它就是一个有穷闭区间在一连续映照下的象．所以它是紧致的，也是连通的．但是，一段弧还不仅仅是一个点集，更主要的它还是一个点列，按参数的递增值排出顺序．如果一个非降函数 $t=\varphi(\tau)$ 将区间 $\alpha'\leqslant\tau\leqslant\beta'$ 映成 $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$，则 $z=z(\varphi(\tau))$ 所定义的有序点列就和 $z=z(t)$ 所定义的点列相同．我们说第一个方程是由第二个方程经参数变换而产生．要这一变换是可逆的，必须而且只须 $\varphi(\tau)$ 为严格递增．例如，方程 $z=t^2+it^4$ $(0\leqslant t\leqslant1)$，就是由参数的可逆变换从方程 $z=t+it^2$ $(0\leqslant t\leqslant1)$ 导来．参数区间 (α,β) 的变换常可借参数的线性变换来完成，这种线性变换具有形式如 $t=a\tau+b\,(a>0)$.

在逻辑上，最简单的办法是把两段具有不同方程的弧看作是不同的弧，而不问其中一个方程是否可从另一个经参数变换来推出．采用这一办法（下面我们正是采用这一办法），那么证明弧的某些性质在参数变换下保持不变就很重要．例如，一段弧的起点和终点经参数变换后保持不变.

$z'(t)=x'(t)+iy'(t)$

如果导数 $z'(t)=x'(t)+iy'(t)$ 存在且 $\neq 0$，那么弧 γ 具有一条切线，它的方向由 $\arg z'(t)$ 确定．我们称弧是可微的，是指 $z'(t)$ 存在而且连续（用连续可微这一名词太不方便）；如果再有 $z'(t)\neq 0$，则称弧是正则的．如果上面列举的条件对除去有穷个 t 的值以外成立，则称弧为分段可微或分段正则；而在这些除外的点上，$z(t)$ 仍将以具有左导数与右导数而连续，这些导数分别等于 $z'(t)$ 的左极限及右极限，而且，在分段正则的情形，这些导数 $\neq 0$．

一段弧的可微性与正则性在参数变换 $t=\varphi(\tau)$ 下保持不变，只要 $\varphi'(\tau)$ 是连续的，而对于正则性，还要 $\varphi'(\tau)\neq 0$．这时，我们就称参数变换是可微的或正则的．

一段弧，如果仅当 $t_1=t_2$ 时有 $z(t_1)=z(t_2)$，则称为简单弧或 Jordan 弧．如果弧的两端点重合，即 $z(\alpha)=z(\beta)$，则称之为闭曲线．对于闭曲线，我们把参数的移换（shift）定义如下：如原来的方程为 $z=z(t)(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$，从区间 (α,β) 中选定一点 t_0，定义一条新的闭曲线，对于 $t_0\leqslant t\leqslant\beta$，它的方程为 $z=z(t)$，而对于 $\beta\leqslant t\leqslant t_0+\beta-\alpha$，它的方程为 $z=z(t-\beta+\alpha)$．这一移换的目的在于移去起点的明显位置．可微的或正则的闭曲线及简单闭曲线（或 Jordan 曲线）的正确定义是很显然的．

弧 $z=z(t)(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$ 的反向弧是指弧 $z=z(-t)(-\beta\leqslant t\leqslant-\alpha)$．两个相互反向的弧，根据具体情况，有时用 γ 及 $-\gamma$，有时用 γ 及 γ^{-1} 表示．常值函数 $z(t)$ 定义一点曲线（point curve）．

原来用轨迹 $|z-a|=r$ 定义的圆 C，可以看作是一闭曲线，它的方程为 $z=a+re^{it}(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$．我们在说到有限圆的时候，将都用这一标准参数表示．这一约定可使我们不必随时写出方程；而且，也是更为重要的一个目的，它可作为区别 C 与 $-C$ 的一个固定的法则．

2.2 域内的解析函数

设 $f(z)$ 是定义在复平面的集 A 上的一个复值函数，当我们考虑导数

$$f'(z)=\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}$$

时，自然应理解为 $z\in A$，并且极限是关于值 h, $z+h\in A$ 取的。因此，导数的存在在 z 是 A 的内点或边界点时有不同的意义。避免这种歧义的方法是坚持所有的解析函数都定义在开集上。

我们给出定义的形式叙述如下：

定义 10 定义在开集 Ω 上的一个复值函数 $f(z)$，如果它在 Ω 的每一点都可导，则称这一函数为 Ω 内的解析函数。

为了更明确些，有时称 $f(z)$ 是复解析的。通用的一个同义词是全纯函数。

要着重指出：开集 Ω 是定义的一部分。作为一条规则，必须避免只讲一个解析函数 $f(z)$ 而不指明函数所处的特定开集 Ω。但若这个集合从上下文看已经很清楚时，这条规则可以不遵守。注意：f 首先必须是一个函数，因此是单值的。若 Ω' 是 Ω 的一个开子集，而 $f(z)$ 在 Ω 内解析，则 f 限制在 Ω' 上的约束是在 Ω' 内解析的；习惯上，把函数和它的约束用同一字母 f 表示。特别，由于一个开集的分集都是开的，所以不失一般性，可以只考虑 Ω 是连通的情形。就是说，Ω 是一个域的情形。

为了措词上更大的“弹性”，我们引入定义 10 的补充于下：

定义 11 一个函数 $f(z)$，如果是某一函数限制于一个任意点集 A 上的约束，而这函数在包含 A 的某一开集内解析，则称 $f(z)$ 在 A 上解析。

最后这定义只是使用了一个比较方便的术语。这是不需要将集 Ω 明显指出的一种情形，因为 Ω 的特殊选择通常是无关重要的，只要它包含 A。另一种可以不指明 Ω 的情况是：“设 $f(z)$ 在 z_0 解析”。它的意思是：函数 $f(z)$ 在 z_0 的某一未规定的开邻域中有定义并且可导。

虽然，上面的定义要求所有的解析函数应该是单值的，但也可以研究象 $\sqrt{z}$、$\log z$、或 $\arccos z$ 等一类的多值函数，只要把它们限制于一个一定的域，在其中可以选择函数的一个单值而解析的

分支.

例如，我们可以选择 Ω 为负实轴 $z\leqslant 0$ 的余集；这一集当然是开的且连通的. 在 Ω 内，$\sqrt{z}$ 有而且只有一个值具有正的实部. 如取这个值作为 $\sqrt{z}$，则 $w=\sqrt{z}$ 就变为 Ω 内的一个单值函数；现在我们来证明它是连续的. 选定两点 z_1、$z_2\in\Omega$，并记 w 的对应值为 $w_1=u_1+iv_1$，$w_2=u_2+iv_2$，其中 u_1、$u_2>0$. 于是

$$|z_1-z_2|=|w_1^2-w_2^2|=|w_1-w_2|\cdot|w_1+w_2|,$$

且 $|w_1+w_2|\geqslant u_1+u_2>u_1$. 因此

$$|w_1-w_2|<\frac{|z_1-z_2|}{u_1},$$

由此可知 $w=\sqrt{z}$ 在 z_1 处连续. 连续性一经确立以后，就可从反函数 $z=w^2$ 的求导中证明其解析性. 事实上，应用微积分学中所用的记法，$\Delta z\to 0$ 蕴涵 $\Delta w\to 0$. 因此

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\Delta w\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z},$$

于是得

$$\frac{dw}{dz}=\frac{1}{\frac{dz}{dw}}=\frac{1}{2w}=\frac{1}{2\sqrt{z}},$$

它具有与 $\sqrt{z}$ 同样的分支.

对于 $\log z$，我们可以用同一个域 Ω，它由负实轴的余集组成，并以条件 $|\operatorname{Im}\log z|<\pi$ 定义对数的主支. 它的连续性也必须加以证明，但现在没有代数恒等式可用，因此必须应用更一般的理由. 以 $w=u+iv=\log z$ 表示主支. 对于给定的一点 $w_1=u_1+iv_1$，$|v_1|<\pi$ 及一给定的 $\varepsilon<0$，考虑 w 平面内由不等式 $|w-w_1|\geqslant\varepsilon$，$|v|\leqslant\pi$，$|u-u_1|\leqslant\log 2$ 所定义的集 A. 这一集是闭且有界的，且对于充分小的 ε，它不是空集. 因此，连续函数 $|e^w-e^{w_1}|$ 在 A 上具有一个极小值 ρ（定理 8 的推论）. 因为 A 并不包含 $w_1+n\cdot 2\pi i$ 的任一点，故这一极小值是正的. 命 $\delta=\min\left(\rho,\ \frac{1}{2}e^{u_1}\right)$，并设

$$|z_1-z_2|=|e^{w_1}-e^{w_2}|<\delta.$$

则 w_2 不能位于 A 中，否则将使 $|e^{w_1}-e^{w_2}|\geqslant\rho\geqslant\delta$. 而且也不可

能有 $u_2<u_1-\log 2$ 或 $u_2>u_1+\log 2$；在前一种情形下，将得 $|e^{w_1}-e^{w_2}|\geqslant e^{u_1}-e^{u_2}>\frac{1}{2}e^{u_1}\geqslant\delta$，在后一种情形下，将得

$$|e^{w_1}-e^{w_2}|\geqslant e^{u_2}-e^{u_1}>e^{u_1}>\delta.$$

因此 w_2 必在圆盘 $|w-w_1|<\varepsilon$ 中，这就证明 w 是 z 的连续函数. 象上面一样，从连续性可知其导数存在且等于 $1/z$.

$\arccos z$ 的无穷多个值就和 $i\log(z+\sqrt{z^2-1})$ 的值一样. 在这种情形下，我们把 z 限制于半直线 $x\leqslant-1$, $y=0$ 与 $x\geqslant1$, $y=0$ 的余集 Ω' 之中. 因为 $1-z^2$ 在 Ω' 中不能为负实数或零，故可象第一例一样来定义 $\sqrt{1-z^2}$，然后令 $\sqrt{z^2-1}=i\sqrt{1-z^2}$. 不仅如此，$z+\sqrt{z^2-1}$ 在 Ω' 中不能为实数，这是因为 $z+\sqrt{z^2-1}$ 与 $z-\sqrt{z^2-1}$ 互为倒数，因此它们仅当 z 与 $\sqrt{z^2-1}$ 都是实数时才是实数；而这只发生在 z 位于实轴的被排除的部分时. 由于 Ω' 是连通的，故知 $z+\sqrt{z^2-1}$ 在 Ω' 中的所有值都位于实轴的同一侧，而由于 i 是这样一个值，故它们都位于上半平面内. 这样，我们可以定义 $\log(z+\sqrt{z^2-1})$ 的一个解析分支使它的虚部位于 0 与 π 之间. 于是得 Ω' 中的一个单值解析函数

$$\arccos z=i\log(z+\sqrt{z^2-1}),$$

它的导数为

$$D\arccos z=i\frac{1}{z+\sqrt{z^2-1}}\left(1+\frac{z}{\sqrt{z^2-1}}\right)=\frac{1}{\sqrt{1-z^2}},$$

此处 $\sqrt{1-z^2}$ 具有正的实部.

在上面这些例子中，选定域和单值分支的方法并不是唯一的. 因此，在每次考虑到象 $\log z$ 这样的函数的时候，分支的选择都要加以说明. 一个基本的事实是在某些域内要定义 $\log z$ 的单值而解析的分支是不可能的. 这一点将在积分一章中证明.

1.2 节的所有结果，对于在开集内解析的函数都有效. 特别，Ω 内的一个解析函数的实部和虚部满足 Cauchy-Riemann 方程：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

反之，如果 u 及 v 在 Ω 内满足这些方程，且如果偏导数连续，则 $u+iv$ 是 Ω 内的一个解析函数.

一个在 Ω 内解析的函数如果化为一常数，则称为退化. 在下面的定理中，我们列出一些具有这样结果的简单条件：

定理 11 在域 Ω 内的一个解析函数，如其导数恒等于零，则必是一常数. 同样，如 Ω 内的解析函数的实部，或虚部，或其模，或其幅角为常数，则函数必是一常数.

导数恒等于零就意味着 $\partial u/\partial x,\ \partial u/\partial y,\ \partial v/\partial x,\ \partial v/\partial y$ 都等于零. 由此可知 u 及 v 在 Ω 内任何一条平行于坐标轴之一的线段上都为常数. 在 1.3 节定理 3 中我们已经指出，一个域内的任意两点都可以用整个位于域内而其线段与坐标轴平行的折线连接起来，因此知 $u+iv$ 为常数.

如果 u 或 v 为常数，则

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}=0,$$

因此 $f(z)$ 必为常数. 如 u^2+v^2 为常数，则

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial x}=0,$$

且
$$u\frac{\partial u}{\partial y}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial x}=0.$$

由这些方程可知，只要行列式 u^2+v^2 不等于零，必有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial x}=0.$$

但如在一点上 $u^2+v^2=0$，则它将恒等于零，从而 $f(z)$ 恒等于零. 因此，$f(z)$ 在任何情形下均为常数.

最后，如 $\arg f(z)$ 为常数，可令 $u=kv$，其中 k 为常数（除非 v 恒等于零）. 但 $u-kv$ 是 $(1+ik)f$ 的实部，因此仍得 f 应为常数的结论.

注意，对于这一定理，从本质上说 Ω 应为一个域. 否则，我们只能断定 $f(z)$ 在 Ω 的每一分集上是常数.

习 题

1. 试在一个适当的域中给出 $\sqrt{1+z}+\sqrt{1-z}$ 的一个单值分支的精确定义,并证明它是解析的.

2. 同样为 $\log\log z$ 定义一个单值分支,并证明它是解析的.

3. 设 $f(z)$ 在域 Ω 内解析,并满足条件 $|f(z)^2-1|<1$. 证明在整个 Ω 上,或者 $\mathrm{Re}\,f(z)>0$,或者 $\mathrm{Re}\,f(z)<0$.

2.3 共形映照

设包含于域 Ω 内的一段弧 γ 的方程为 $z=z(t)\ (\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$,并设 $f(z)$ 在 Ω 内有定义而且连续. 则方程 $w=w(t)=f(z(t))$ 规定 w 平面上的一段弧 γ',我们不妨称它为 γ 的象.

考察在 Ω 内解析的 $f(z)$. 如 $z'(t)$ 存在,则 $w'(t)$ 也存在,且由下式确定:

$$w'(t)=f'(z(t))z'(t). \tag{1}$$

现在我们来研究这一方程在一点 $z_0=z(t_0)$ 处的意义,此处

$$z'(t_0)\neq 0,\qquad f'(z_0)\neq 0.$$

第一个结论就是 $w'(t_0)\neq 0$. 因此 γ' 在 $w_0=f(z_0)$ 处具有一条切线,其方向由下式确定

$$\arg w'(t_0)=\arg f'(z_0)+\arg z'(t_0). \tag{2}$$

这一关系断言 γ 在 z_0 处的有向切线与 γ' 在 w_0 处的有向切线之间的夹角等于 $\arg f'(z_0)$. 因此它与曲线 γ 无关. 由于这一理由,通过 z_0 而互切的曲线将映成在 w_0 处互切的曲线. 不仅如此,在 z_0 处交成一个角的两条曲线将映成两条曲线,保持其交角的大小和方向不变. 根据这一性质,我们把 $w=f(z)$ 所确定的映照在所有 $f'(z)\neq 0$ 的各点上,称为是共形的.

映照的一个有关性质可从模 $|f'(z_0)|$ 的分析中推出. 我们有

$$\lim_{z\to z_0}\frac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|}=|f'(z_0)|,$$

这就是说以 z_0 为一端点的任一小线段在极限情形下以比例 $|f'(z_0)|$ 收缩或展伸. 换言之, 在 z_0 处, 由变换 $w=f(z)$ 所引起的尺度上的线性变化与方向无关. 一般说来, 这种尺度的变化将逐点不同.

反之, 很明显地可以看出, 两类共形性共同保证了 $f'(z_0)$ 的存在. 但由一类共形性单独地推出 $f'(z_0)$ 的存在就不那么明显, 至少在附加的正则性假设下如此.

更精确地来说, 假设偏导数 $\partial f/\partial x$ 及 $\partial f/\partial y$ 都是连续的, 在这种情形下, $w(t)=f(z(t))$ 的导数可表成下面的形式:

$$w'(t_0)=\frac{\partial f}{\partial x}x'(t_0)+\frac{\partial f}{\partial y}y'(t_0),$$

这里偏导数取在 z_0 处. 如以 $z'(t_0)$ 表示, 则可写为

$$w'(t_0)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}-i\frac{\partial f}{\partial y}\right)z'(t_0)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+i\frac{\partial f}{\partial y}\right)\overline{z'(t_0)}.$$

如果保持角不变, $\arg[w'(t_0)/z'(t_0)]$ 应不依赖于 $\arg z'(t_0)$. 因此, 表达式

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}-i\frac{\partial f}{\partial y}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+i\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\overline{z'(t_0)}}{z'(t_0)} \tag{3}$$

应具有一个不变的幅角. 当 $\arg z'(t_0)$ 变化时, 由 (3) 所表示的点画出一个以

$$\frac{1}{2}\left|\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)+i\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right|$$

为半径的圆. 在这个圆上幅角不可能为常数, 除非圆的半径等于零, 因此必须有

$$\frac{\partial f}{\partial x}=-i\frac{\partial f}{\partial y}, \tag{4}$$

这就是 Cauchy-Riemann 方程的复形式.

同理, 尺度的改变不依赖于方向这一条件意味着(3)式的模应不变. 在一个圆上, 要模为常数, 仅当圆半径等于零或圆心在原点时才可能. 在第一种情形下, 我们得(4)式, 而在第二种情形下, 有

$$\frac{\partial f}{\partial x}=i\frac{\partial f}{\partial y}.$$

上式表示 $\overline{f(z)}$ 是解析的. 由具有非零导数的解析函数的共轭函

数所确定的映照称为是间接共形的. 显然，它将保持大小不变，但角的符号则相反.

如果由 $w=f(z)$ 所作的 Ω 的映照是拓扑的，那么反函数 $z=f^{-1}(w)$ 也是解析的. 这一断言在 $f'(z)\neq 0$ 时很容易证明，因为此时反函数的导数在点 $z=f^{-1}(w)$ 处必须等于 $1/f'(z)$. 在后面我们将证明，在一个解析函数所作的映照是拓扑的情形下，$f'(z)$ 决不能等于零.

如果映照限制在 z_0 的一个充分小的邻域内，则由 $f'(z_0)\neq 0$ 就完全可以断言这映照是拓扑的. 这可从微积分学中的隐函数定理推出，因为函数 $u=u(x, y)$, $v=v(x, y)$ 在点 z_0 处的 Jacobi 行列式是 $|f'(z_0)|^2$ 因而 $\neq 0$. 在后面，我们将介绍这一重要定理的一个简单证法.

但是，即使在整个区域 Ω 中都有 $f'(z)\neq 0$，我们也不能断言整个区域的映照一定是拓扑的. 为了说明这一点，可参看图 3-1. 在图中，子域 Ω_1 及 Ω_2 的映照都是一对一的，但它们的象则互相交迭. 我们可以把整个区域的象设想为一个透明的膜，它是部分地自相遮盖着的. 这就是 Riemann 在引进现在称为 Riemann 面的广义区域时所用的简明而有效的观念.

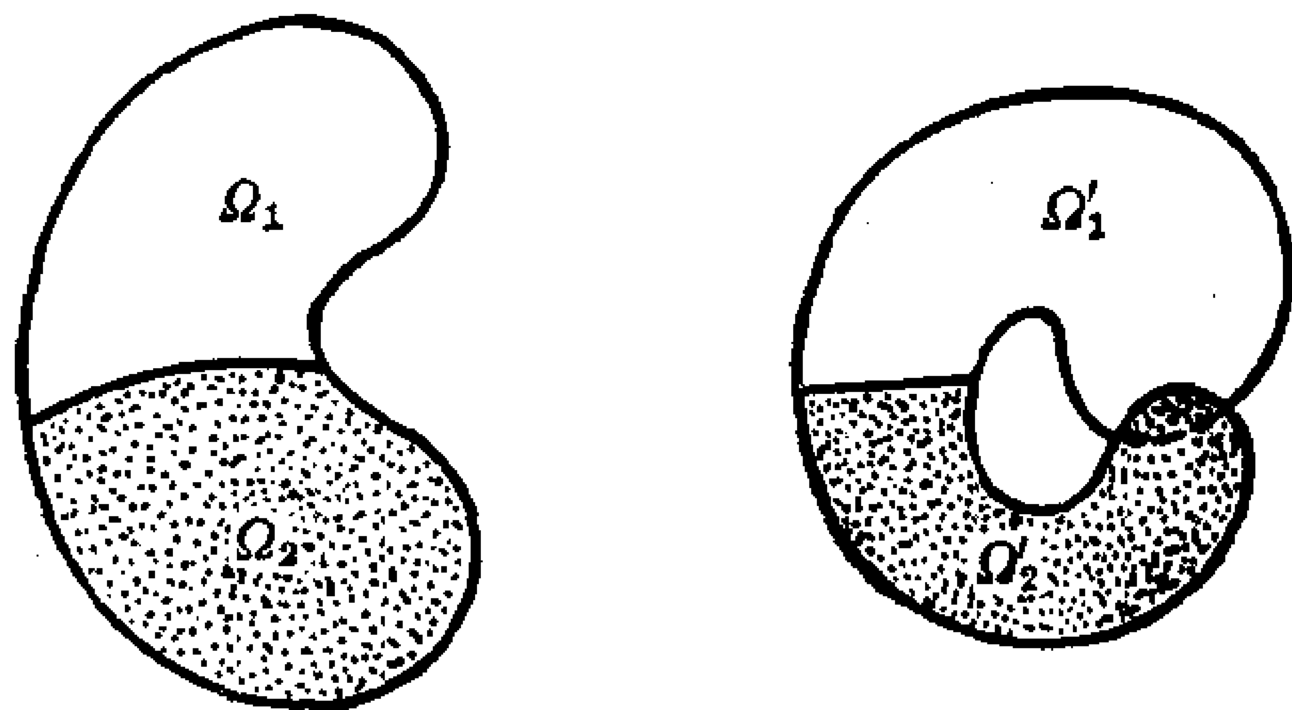


图 3-1　二层互相遮盖的区域

2.4　长度和面积

我们看到，在共形映照 $f(z)$ 下，一个无穷小线段的长度在点 z 被乘上因子 $|f'(z)|$. 由于变形在各个方向是相同的，所以无穷小面积显然被乘以 $|f'(z)|^2$.

现在我们把这置于严格的基础上. 从微积分知道，具有方程 $z=z(t)=x(t)+iy(t)\,(a\leqslant t\leqslant b)$ 的可微弧 γ 的长度由下式给出：

$$L(\gamma)=\int_a^b \sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,dt=\int_a^b |z'(t)|\,dt.$$

象曲线 γ' 由 $w=w(t)=f(z(t))$ 确定，其导数为 $w'(t)=f'(z(t))\cdot z'(t)$. 这样，它的长度是

$$L(\gamma')=\int_a^b |f'(z(t))|\,|z'(t)|\,dt.$$

习惯上用下面较短的记号表示：

$$L(\gamma)=\int_\gamma |dz|,\quad L(\gamma')=\int_\gamma |f'(z)|\,|dz|. \tag{5}$$

注意：在复数的记法中，关于弧长积分常用的微积分记号 ds 要换为 $|dz|$.

设 E 是平面中的一个点集，其面积

$$A(E)=\iint_E dx\,dy$$

可以表成 Riemann 二重积分. 若 $f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$ 是一个双向可微映照，则根据积分变量的变换规则，象 $E'=f(E)$ 的面积由下式给出：

$$A(E')=\iint_E |u_x v_y-u_y v_x|\,dxdy.$$

但若 $f(z)$ 是一个包含 E 的开集的共形映照，则根据 Cauchy-Riemann 方程，$u_x v_y-u_y v_x=|f'(z)|^2$，因而得到

$$A(E')=\iint_E |f'(z)|^2 dx\,dy. \tag{6}$$

公式(5)和(6)在复分析中通常称为几何函数论的部分，有重要应用.

3 线性变换

在所有的解析函数中，一阶有理函数具有最简单的映照性质，因为这些函数确定的从扩充平面到自身的映照既是共形的，又是拓扑的. 线性变换还有非常奇特的几何性质. 因此，它们的重要性

远不止只是为共形映照提供简单的例子．希望读者对这一几何面貌予以特别重视，从此可以获得一些简单而非常有价值的技巧．

3.1 线性群

我们在第 2 章第 1.4 节已经提到线性分式变换

$$w=S(z)=\frac{az+b}{cz+d}, \tag{7}$$

其中 $ad-bc\neq 0$，有逆

$$z=S^{-1}(w)=\frac{dw-b}{-cw+a}.$$

特殊值 $S(\infty)=a/c$ 和 $S(-d/c)=\infty$ 可以作为约定而引入，也可以作为 $z\to\infty$ 和 $z\to -d/c$ 的极限而引入．根据后一解释，显见 S 是扩充平面映成自身的一个拓扑映照，其拓扑由 Riemann 球面上的距离定义．

对于线性变换，通常我们将 $S(z)$ 改记为 Sz．在表示式 (7) 中，如果 $ad-bc=1$，则称它是规范化的．很明显，每一线性变换都有两个规范化的表示式，其中一个可以从另一个经改变系数符号而得到．

表示一个线性变换的方便办法是使用齐次坐标．令 $z=z_1/z_2$，$w=w_1/w_2$，则如果

$$\begin{aligned} w_1&=az_1+bz_2,\\ w_2&=cz_1+dz_2, \end{aligned} \tag{8}$$

或写成矩阵形式

$$\begin{pmatrix} w_1\\ w_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1\\ z_2 \end{pmatrix},$$

便有 $w=Sz$．矩阵记法的方便之处主要在于它可使一个复合变换 $w=S_1S_2z$ 易于确定．如果我们用下标来区分 S_1 与 S_2 对应的矩阵，则易证 S_1S_2 可用如下的矩阵乘积来确定：

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1\\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & b_2\\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1a_2+b_1c_2 & a_1b_2+b_1d_2\\ c_1a_2+d_1c_2 & c_1b_2+d_1d_2 \end{pmatrix}.$$

所有的线性变换组成一个群．事实上，结合律 $(S_1S_2)S_3=$

$S_1(S_2S_3)$ 对任意变换都成立. 恒等式 $w=z$ 是一线性变换, 线性变换的反变换仍是线性的. 比 $z_1:z_2\neq 0:0$ 都是复射影线上的点, 而 (8) 表明线性变换群就是复数一维射影群, 通常记为 $P(1, \mathbf{C})$. 如果我们只用规范化表示式, 那么(8)就是行列式为 1 的 2 阶矩阵的群(记为 $SL(2, \mathbf{C})$), 不过有两个相反的矩阵对应于同一个线性变换.

对矩阵记法, 我们不作进一步的使用, 不过要指出: 最简单的线性变换对应于如下形式的矩阵:

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

其中第一个, $w=z+\alpha$, 称为**平移**. 第二个, $w=kz$, 当 $|k|=1$ 时是一**旋转**, 而当 $k>0$ 时是**相似变换**. 对于任意复数 $k\neq 0$, 令 $k=|k|\cdot k/|k|$, 因此, $w=kz$ 可看作是一个相似变换之后接着作一旋转所得的结果. 第三个变换, $w=1/z$, 称为**反演**.

如 $c\neq 0$, 则

$$\frac{az+b}{cz+d}=\frac{bc-ad}{c^2(z+d/c)}+\frac{a}{c},$$

这一分解说明最普通的线性变换是由一个平移、一个反演、一个旋转及一个相似变换与另一平移所组成. 如 $c=0$, 反演不存在, 最后一个平移亦不需要了.

习　题

1. 求证反射 $z\to\bar{z}$ 不是一个线性变换.

2. 如
$$T_1z=\frac{z+2}{z+3},\quad T_2z=\frac{z}{z+1},$$
求 T_1T_2z、T_2T_1z 及 $T_1^{-1}T_2z$.

3. 试证明将原点变为原点并保持所有距离不变的一个最一般的变换或者是一个旋转, 或者是一个旋转之后接着一个关于实轴的反射.

4. 试证明将实轴变成它本身的任何线性变换都可以写成实系数式.

3.2 交比

在扩充平面上给定三个不同的点 z_2、z_3、z_4，则有一个将这些点变换为 1, 0, ∞ 的线性变换 S 存在. 如已知各点中没有一点是 ∞，则 S 将由下式确定:

$$Sz=\frac{z-z_3}{z-z_4}:\frac{z_2-z_3}{z_2-z_4}. \tag{9}$$

如 z_2、z_3 或 $z_4=\infty$，则变换分别化为

$$\frac{z-z_3}{z-z_4},\qquad \frac{z_2-z_4}{z-z_4},\qquad \frac{z-z_3}{z_2-z_3}.$$

如 T 为具有同样性质的另一变换，则 ST^{-1} 将置点 1, 0, ∞ 不变. 直接计算表明,这仅对恒等变换为真，因而有 $S=T$. 由此可知 S 是唯一确定的.

定义 12 在 z_2, z_3, z_4 变为 1, 0, ∞ 的线性变换下, z_1 的象点称为 z_1, z_2, z_3, z_4 的交比, 记做 (z_1, z_2, z_3, z_4).

这一定义仅当 z_2、z_3、z_4 是不同的点时才有意义. 当四点中有三点相异时, 可以引入约定数值, 但这对我们是不重要的.

交比在线性变换下是不变的. 更精确的叙述是:

定理 12 如 z_1、z_2、z_3、z_4 为扩充平面上四个相异点, T 为任一线性变换, 则

$$(Tz_1,\ Tz_2,\ Tz_3,\ Tz_4)=(z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4).$$

这一定理的证明是很显然的，因为如果 $Sz=(z, z_2, z_3, z_4)$，则 ST^{-1} 将 Tz_2, Tz_3, Tz_4 变为 1, 0, ∞. 因此, 根据定义有

$$(Tz_1,\ Tz_2,\ Tz_3,\ Tz_4)=ST^{-1}(Tz_1)=Sz_1=(z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4).$$

借助于这一性质, 我们立刻可以写出将已知点 z_1、z_2、z_3 变到规定位置 w_1、w_2、w_3 的线性变换. 这个变换应为

$$(w,\ w_1,\ w_2,\ w_3)=(z,\ z_1,\ z_2,\ z_3).$$

当然, 一般还必须从这方程中解出 w.

定理 13 交比 (z_1, z_2, z_3, z_4) 为实数的充要条件是四点共圆或共线.

这一定理根据初等几何学原理是很显然的，因为我们有

$$\arg(z_1, z_2, z_3, z_4)=\arg\frac{z_1-z_3}{z_1-z_4}-\arg\frac{z_2-z_3}{z_2-z_4},$$

如果这些点都位于一个圆上，则上式等于 0 或 $\pm\pi$，依点的相互位置而定。

由于 $Tz=(z, z_2, z_3, z_4)$ 在而且只在实轴经 T^{-1} 变换后所成的象上取实数，因此要从分析上证明这一定理，我们只要证明在任一线性变换下实轴的象或者是一圆或者是一直线即可。

当 z 为实数时 $w=T^{-1}z$ 的值满足方程 $Tw=\overline{Tw}$。显然，这一条件具有如下形式：

$$\frac{aw+b}{cw+d}=\frac{\bar{a}\bar{w}+\bar{b}}{\bar{c}\bar{w}+\bar{d}}.$$

交叉相乘后得

$$(a\bar{c}-c\bar{a})|w|^2+(a\bar{d}-c\bar{b})w+(b\bar{c}-d\bar{a})\bar{w}+b\bar{d}-d\bar{b}=0.$$

如 $a\bar{c}-c\bar{a}=0$，则上式为一直线的方程，因为在这一情况下系数 $a\bar{d}-c\bar{b}$ 不能同时为零。如 $a\bar{c}-c\bar{a}\neq 0$，我们可用这一系数除全式，并完成平方，经简单计算后得到

$$\left|w+\frac{\bar{a}d-\bar{c}b}{\bar{a}c-\bar{c}a}\right|=\left|\frac{ad-bc}{a\bar{c}-c\bar{a}}\right|,$$

这是一个圆的方程。

最后的结果表明在线性变换的理论中，我们用不到区别圆和直线。这从它们在 Riemann 球面上都对应于圆这一事实可以进一步得到解释。因此，我们今后将在这一广义的意义下使用圆这个字[1]。

下面是定理 12 和 13 的直接推论：

定理 14 线性变换将圆变为圆。

习　题

1. 试求出将 0, i, $-i$ 变为 1, -1, 0 的线性变换。

[1] 这一说法只有在研究线性变换时有效。

2. 试将对应于四点的 24 个排列的交比用 $\lambda=(z_1, z_2, z_3, z_4)$ 表示出来.

3. 如一四边形的相邻顶点 z_1, z_2, z_3, z_4 都位在一个圆周上, 求证

$$|z_1-z_3|\cdot|z_2-z_4|=|z_1-z_2|\cdot|z_3-z_4|+|z_2-z_3|\cdot|z_1-z_4|,$$

并从几何上解释这个结果.

4. 试证明任意四个相异点可用线性变换变至 $1, -1, k, -k$ 的位置, 此处 k 的值依点而定. 这里共有多少个解? 它们怎样相关?

3.3 对称性

点 z 及 $\bar{z}$ 是关于实轴对称的. 实系数的线性变换把实轴变为实轴, 并把点 $z, \bar{z}$ 变为仍然是对称的点. 更一般地说, 如果线性变换 T 把实轴变为一个圆 C, 则我们说点 $w=Tz$ 及 $w^*=T\bar{z}$ 关于 C 对称. 这是 w、w^* 及 C 之间的一种关系, 它与 T 无关. 事实上, 如 S 为将实轴变为 C 的另一变换, 则 $S^{-1}T$ 是一实变换, 因此 $S^{-1}w=S^{-1}Tz$ 及 $S^{-1}w^*=S^{-1}T\bar{z}$ 也是共轭的. 这样, 我们可把对称性定义如下:

定义 13 点 z 及 z^* 称为关于过点 z_1, z_2, z_3 的圆 C 对称, 必须而且只须 $(z^*, z_1, z_2, z_3)=\overline{(z, z_1, z_2, z_3)}$.

C 上的点, 而且只有这些点, 是与它们自身对称的. 把点 z 变为 z^* 的映照是一个一一对应, 称为关于 C 的反射. 显然, 两个反射组成一个线性变换.

现在我们来研究对称的几何意义. 先设 C 为一直线, 我们可取 $z_3=\infty$, 则对称的条件变为

$$\frac{z^*-z_2}{z_1-z_2}=\frac{\bar{z}-\bar{z}_2}{\bar{z}_1-\bar{z}_2}. \tag{10}$$

取绝对值得 $|z^*-z_2|=|z-z_2|$. 此处 z_2 可以为 C 上的任一有限点, 因此可知 z 及 z^* 至 C 上任一点的距离都相等. 由 (10) 还可得

$$\operatorname{Im}\frac{z^*-z_2}{z_1-z_2}=-\operatorname{Im}\frac{z-z_2}{z_1-z_2},$$

因此 z 及 z^* 位于 C 所界定的两个不同的半平面内❶. C 是 z 及

❶ 除非它们重合而都位于 C 上.

z^* 连线的垂直平分线，这一点留给读者自己来证.

现在我们来讨论 C 是一个有限圆的情形. 设 C 的圆心为 a，半径为 R. 多次应用交比的不变性可得如下结果：

$$\overline{(z, z_1, z_2, z_3)} = \overline{(z-a, z_1-a, z_2-a, z_3-a)}$$
$$= \left(\bar{z}-\bar{a}, \frac{R^2}{z_1-a}, \frac{R^2}{z_2-a}, \frac{R^2}{z_3-a}\right)$$
$$= \left(\frac{R^2}{\bar{z}-\bar{a}}, z_1-a, z_2-a, z_3-a\right)$$
$$= \left(\frac{R^2}{\bar{z}-\bar{a}}+a, z_1, z_2, z_3\right).$$

这一方程表明 z 的对称点为 $z^*=R^2/(\bar{z}-\bar{a})+a$，或者说 z 及 z^* 满足方程

$$(z^*-a)(\bar{z}-\bar{a})=R^2. \tag{11}$$

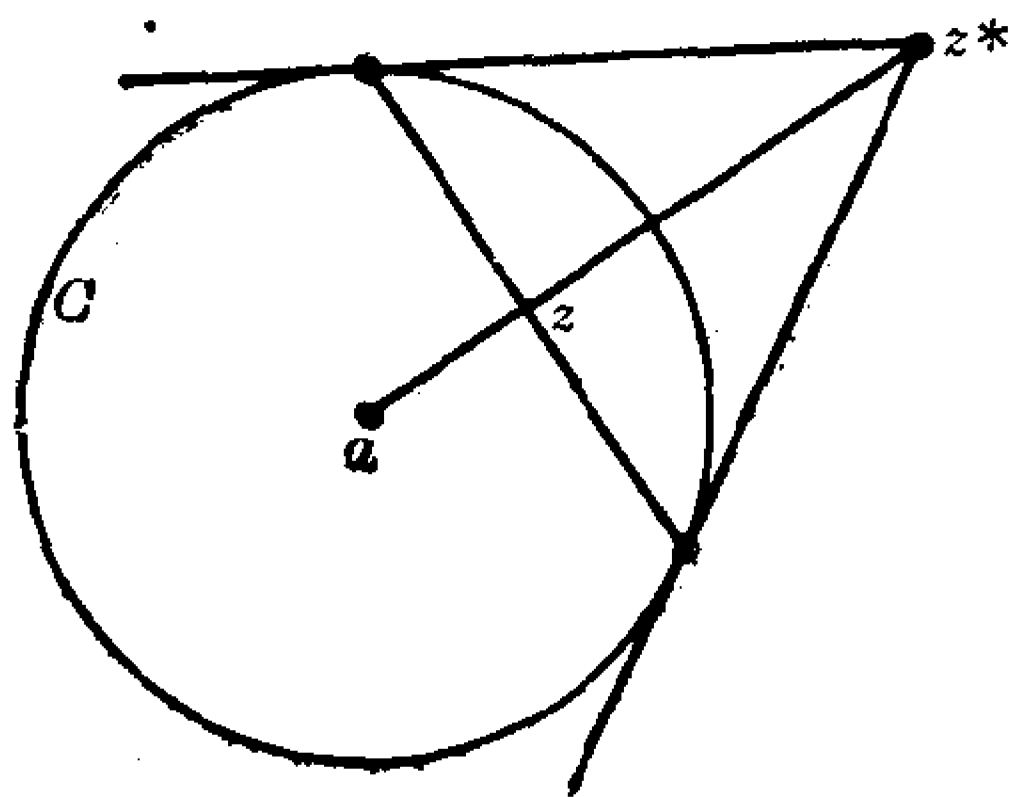


图 3-2　关于圆的反射

因此 z 与 z^* 至圆心的距离的相乘积 $|z^*-a|\cdot|z-a|$ 等于 R^2. 此外，比 $(z^*-a)/(z-a)$ 为正，这说明 z 及 z^* 位于由 a 引出的同一条半直线上. 这提供了一个作 z 的对称点的简单作图法(图 3-2). 注意，a 的对称点是 ∞.

定理 15（对称原理）　如一线性变换将一个圆 C_1 变为圆 C_2，则这一变换必将关于 C_1 对称的任一对点变换为关于 C_2 对称的一对点.

简略地说，线性变换保持对称性. 如 C_1 或 C_2 为实轴，则这一原理直接可由对称的定义得出. 在一般的情形下，应用一个把圆 C_1 变为实轴的中间变换即可得到定理的证明.

有两种方法应用对称原理. 如果在某一线性变换下，C 及 z 的象为已知，则应用对称原理可求得 z^* 的象. 反之，如 z 及 z^* 的象为已知，则 C 的象必为 z 及 z^* 象的对称轴. 虽然这还不足以确定 C 的象，但是我们所得的知识仍然是有价值的.

对称原理实际可应用于求圆 C 到圆 C' 的线性变换的问题

上．知道了 C 上的三点 z_1, z_2, z_3 变换到 C' 上的三点 w_1, w_2, w_3, 通常就可确定出这一变换；这时的变换为 $(w, w_1, w_2, w_3)=(z, z_1, z_2, z_3)$．如果规定 C 上的一点 z_1 对应于 C' 上的一点 w_1, 不在 C 上的一点 z_2 变到不在 C' 上的一点 w_2, 则变换亦可确定．因为由此可知 z_2^* (z_2 关于 C 的对称点)必须对应于 w_2^* (w_2 关于 C' 的对称点)，因而从关系式 $(w, w_1, w_2, w_2^*)=(z, z_1, z_2, z_2^*)$ 可得所求的变换．

习　题

1．求证每一个反射将圆变为圆．

2．试将虚轴、直线 $x=y$、圆 $|z|=1$ 反射到圆 $|z-2|=1$ 上．

3．在上题中，试用几何作图法作出反射．

4．试求可以将圆 $|z|=2$ 变为 $|z+1|=1$, 将点 -2 变为原点，将原点变为 i 的线性变换．

5．试求将圆 $|z|=R$ 变为它自身的线性变换的最一般形式．

6．一线性变换把一组同心圆变换为另一组同心圆，试证明圆半径之比不变．

7．试求一个可以把 $|z|=1$ 与 $\left|z-\frac{1}{4}\right|=\frac{1}{4}$ 变换为同心圆的线性变换．半径之比怎样？

8．试求一个可以把 $|z|=1$ 及 $x=2$ 变换为同心圆的线性变换．

3.4　有向圆

由于 $S(z)$ 是解析的，并且

$$S'(z)=\frac{ad-bc}{(cz+d)^2}\neq 0,$$

故对 $z\neq -d/c$ 和 ∞, 映照 $w=S(z)$ 是共形的．由此可知，两个相交的圆映成有相同交角的圆．此外，角的方向是保持不变的，从直觉的观点看，这意味着左和右保持不变，但这需要一个更精确的阐述．

圆 C 的一个定向由 C 上的有序三重点 z_1、z_2、z_3 确定．相对

于这一定向，如果 $\text{Im}(z, z_1, z_2, z_3)>0$，不在 C 上的一点 z 称为位于 C 的右边；如果 $\text{Im}(z, z_1, z_2, z_3)<0$，就称位于 C 的左边(这与日常的用法一致，因为 $(i, 1, 0, \infty)=i$)．这里主要的是要证明一共只有两种不同的定向．这是指：对于所有的三重点来说，左方和右方的意义可以不论，但左右之间存在着的区别则是共同的．由于交比是不变的，所以只要研究 C 是实轴的情形就够了．于是

$$(z, z_1, z_2, z_3)=\frac{az+b}{cz+d},$$

其中系数是实的，经简单计算得

$$\text{Im}(z, z_1, z_2, z_3)=\frac{ad-bc}{|cz+d|^2}\text{Im}\, z.$$

我们看到右方和左方之间的区别就象上半平面和下半平面之间的区别一样．至于哪一个是左，哪一个是右，则依行列式 $ad-bc$ 的符号而定．

一个线性变换 S 把有向圆 C 变换为一个以三重点 Sz_1、Sz_2、Sz_3 定向的圆．从交比的不变性可知：C 的左边和右边将对应于象圆的左边和右边．

如果两圆相切，它们的定向就可以比较．事实上，我们可用一个线性变换将它们的切点变到 ∞，两圆就变为平行直线．至于怎样比较平行线的方向，是我们所知道的．

在几何表示中，定向 z_1、z_2、z_3 可用箭头来表示，箭头的方向由 z_1 通过 z_2 指向 z_3．在普通的坐标系中，对这一箭头来说，左边和右边的意义与我们日常所感觉的左右意义一致．当我们把一个未经推广的复平面考虑为扩充平面的一部分时，无穷远点是特殊的．因此，我们可以根据 ∞ 应位于有向圆右边这一要求来定义所有有限圆的绝对正定向．这样，左边的点组成圆的内部而右边的点则组成圆的外部．

习 题

1．如果 z_1、z_2、z_3、z_4 为同一圆上的点，试证明 z_1、z_3、z_4 和 z_2、z_3、z_4

在而且只有在 $(z_1, z_2, z_3, z_4)>0$ 时确定同一定向.

2. 试证明圆的切线垂直于过切点的半径(这样, 圆的切线可以定义为与圆只有一个公共点的直线).

3. 试证明圆 $|z-a|=R$ 的内部系由满足不等式 $|z-a|<R$ 的全部点组成.

4. 两个有向圆在它们一个交点上的交角定义为它们在该点的相同取向的切线之间的夹角. 用分析的推理而不是用几何观察证明: 在两个交点处的交角是互为反向的.

3.5 圆族

用某些圆族可使线性变换更趋于具体, 这些圆族可以设想为圆坐标系的坐标线.

考察如下形式的线性变换:

$$w=k\frac{z-a}{z-b}.$$

此处 $z=a$ 对应于 $w=0$, 而 $z=b$ 对应于 $w=\infty$. 由此可知在 w 平面内通过原点的直线都是通过 a 及 b 的圆的象. 反之, 以原点为圆心的同心圆 $|w|=\rho$, 对应于如下方程所决定的圆:

$$\left|\frac{z-a}{z-b}\right|=\rho/|k|.$$

这些是具有极限点 a 及 b 的 Apollonius 圆. 从它们的方程可知, 它们是到点 a 及 b 的距离有定比的点的轨迹.

以 C_1 表示通过 a、b 的圆, 并以 C_2 表示以 a、b 为极限点的 Apollonius 圆. 由所有这些圆 C_1 及 C_2 组成的形相(图 3-3)称为 a、b 所确定的圆网或 Steiner 圆族. 它具有很多有趣的性

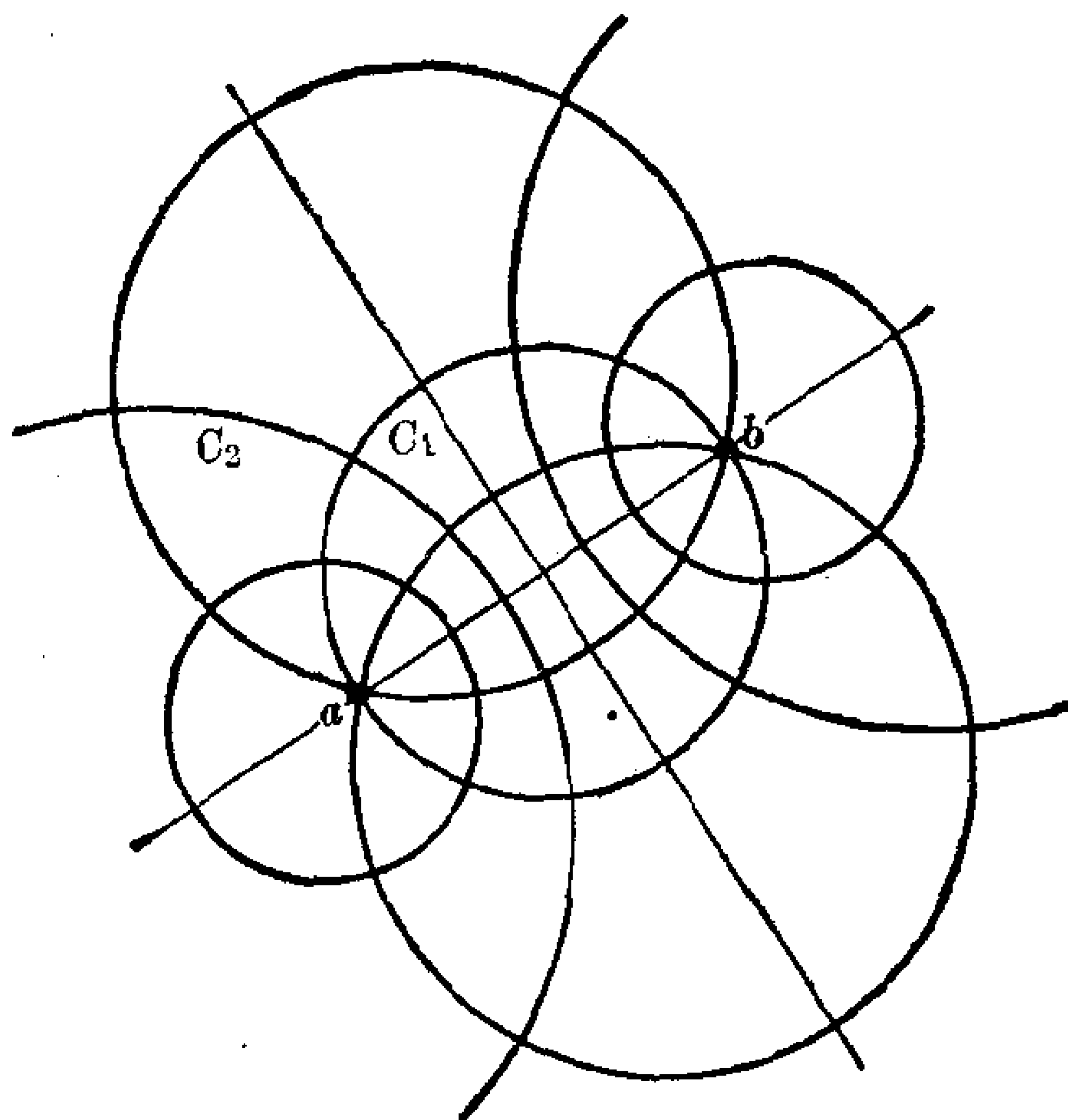


图 3-3 Steiner 圆族

质，略举几点如下：

1．通过平面上除了极限点以外的每一点只有一个 C_1 及一个 C_2.

2．每一个 C_1 与每一个 C_2 直交.

3．在关于一个 C_1 的反射下，每一个 C_2 变换为它本身，而每一个 C_1 变换为另一个 C_1. 在关于一个 C_2 的反射下，每一个 C_1 变换为它本身，而每一个 C_2 变换为另一个 C_2.

4．极限点关于每一个 C_2 都是对称的，但对任何其他的圆不对称.

这些性质在当极限点为 0 及 ∞，即当 C_1 是通过原点的直线而 C_2 是同心圆时是极为显见的．因为这些性质在线性变换下保持不变，所以在一般情形下它们必继续为真.

如一线性变换 $w=Tz$ 将 a、b 变为 a'、b'，它可写成如下的形式：

$$\frac{w-a'}{w-b'}=k\frac{z-a}{z-b}. \tag{12}$$

显然，T 将圆 C_1 及 C_2 变换为以 a'、b' 为极限点的圆 C_1' 及 C_2'.

这种情形在 $a'=a$, $b'=b$ 时特别简单．这时点 a、b 称为 T 的不动点，且可将 z 及 Tz 表示于同一平面．在这种情况下，整个圆网将在它自己上面映象．k 的值可以确定象圆 C_1' 及 C_2'. 事实上，在适当的定向下，在 C_1 与其象 C_1' 上对应点的形如 $\arg\dfrac{z-a}{z-b}$ 之差为 $\arg k$，而在 C_2 及 C_2' 上对应点的形如 $|z-a|/|z-b|$ 之比为 $|k|$.

所有的 C_1 或所有的 C_2 映成它们自身的特殊情形是非常重要的．对于所有的 C_1，如 $k>0$，则 $C_1'=C_1$（如 $k<0$，则圆仍然相等，但定向相反）．这时的变换称为双曲变换．当 k 增大时，点 Tz、$z\neq a$、b 将沿着圆 C_1 向 b 移动．考察这一移动就可得到双曲变换的一个十分清晰的形象.

当 $|k|=1$ 时就有 $C_2'=C_2$. 具有这种性质的变换称为椭圆变换．当 $\arg k$ 变化时，点 Tz 沿着圆 C_2 移动，这一移动沿着不同的

方向环绕 a 及 b.

具有两个不动点的一般线性变换是具有相同不动点的一个双曲变换及一个椭圆变换的相乘积.

一线性变换的不动点可从下面的方程中求得:

$$z=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}. \tag{13}$$

在一般情形下,这是一个二次方程,具有两个根;如 $\gamma=0$,则不动点之一为 ∞. 不过,可能有两根相重的情形. 具有相重的不动点的线性变换称为抛物变换. 抛物变换的条件是 $(\alpha-\delta)^2=4\beta\gamma$.

如方程(13)具有两个不同的根 a 及 b,则变换可写成如下形式:

$$\frac{w-a}{w-b}=k\frac{z-a}{z-b}.$$

因此我们可用 a、b 所确定的 Steiner 圆族来讨论变换的性质. 但应该注意,这一方法并不只限于这种情形. 我们可把任一线性变换对任意的 a、b 写成(12)的形式,并根据最大方便来应用两族圆网.

为了讨论抛物变换,我们还须要引入另一型圆网. 考察变换

$$w=\frac{\omega}{z-a}+c.$$

显然 w 平面中的直线对应于过 a 的圆;平行线对应于互切的圆. 特别是,如 $w=u+iv$,则直线 $u=$常数及 $v=$常数对应于两族互切的圆,它们彼此直交(图 3-4). 这一情形可看作是一个退化的 Steiner 圆族. 它由点 a 及圆族之一的切线确定. 以 C_1 表示直线 $v=$常数的象,C_2 表示另一族圆. 显然,直线 $v=\operatorname{Im} c$ 对应于圆族 C_1 的切线;其方向为 $\arg\omega$.

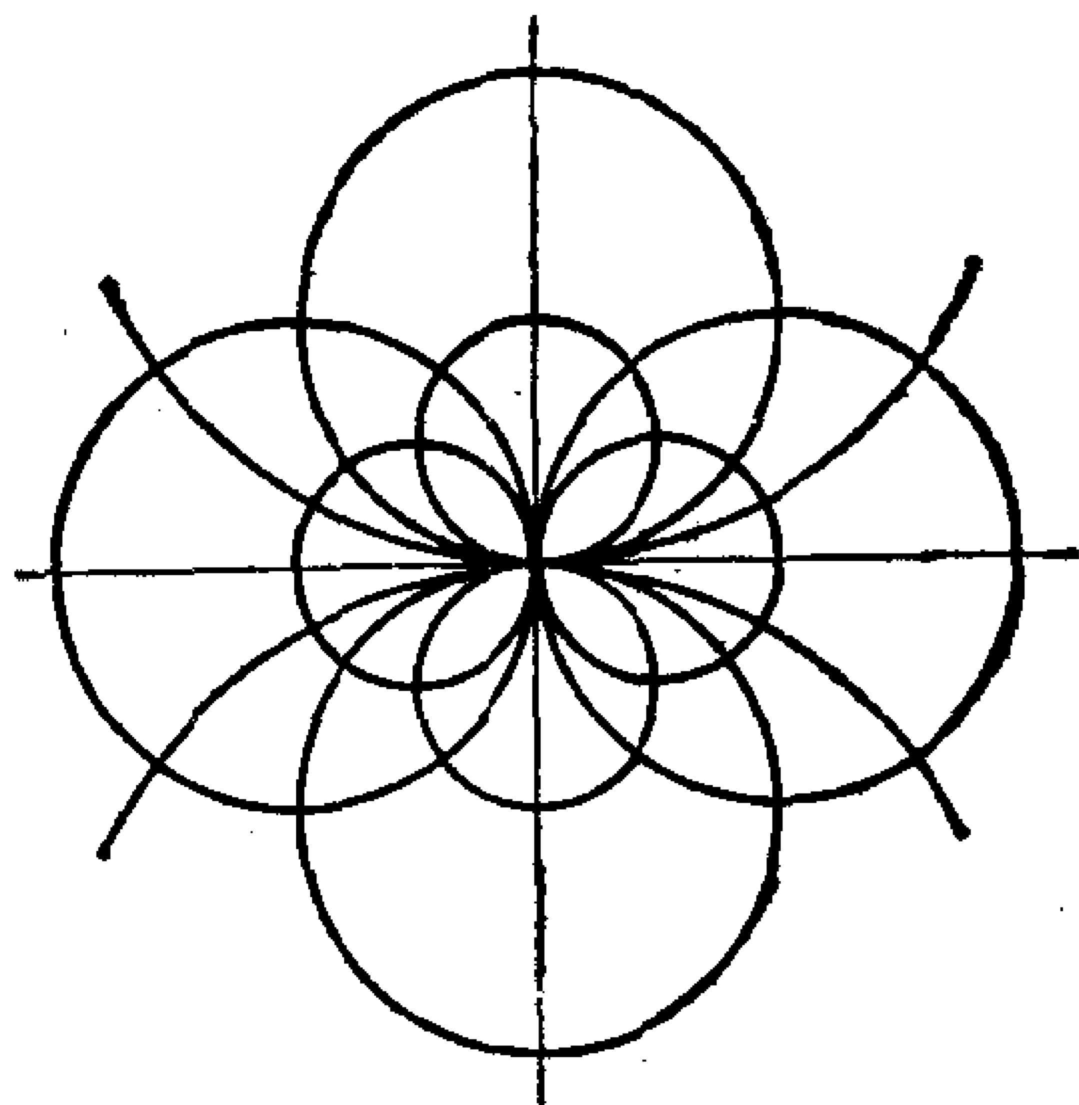


图 3-4 退化 Steiner 圆族

把 a 变换为 a' 的任一变换可写成如下形式:

$$\frac{\omega'}{w-a'}=\frac{\omega}{z-a}+c.$$

显然，圆 C_1 及 C_2 将变为由 a' 及 ω' 所确定的圆 C_1' 及 C_2'. 现在设 $a=a'$ 为唯一不动点，则 $\omega=\omega'$，且

$$\frac{\omega}{w-a}=\frac{\omega}{z-a}+c. \tag{14}$$

用这一变换可将圆 C_1 及 C_2 组成的图形映成它自身. 在(14)中，一个乘数因子是任意的，因此我们可假设 c 为实数. 于是每一个 C_1 映成它自身，而抛物变换可认为是沿着圆 C_2 的移动.

一个既不是双曲的，又不是椭圆的，也不是抛物的线性变换称为斜驶 (loxodromic) 变换.

习 题

1. 求如下线性变换的不动点：

$$w=\frac{z}{2z-1},\quad w=\frac{2z}{3z-1},\quad w=\frac{3z-4}{z-1},\quad w=\frac{z}{2-z}.$$

这些变换中哪些是椭圆，双曲或抛物变换?

2. 设变换
$$Sz=\frac{az+b}{cz+d}$$
的系数用条件 $ad-bc=1$ 规范化，试证明 S 是椭圆的充要条件为 $-2<a+d<2$；是抛物的，如果 $a+d=\pm2$；是双曲的，如果 $a+d<-2$ 或 >2.

3. 试证明：对某个整数 n，满足条件 $S^n z=z$ 的线性变换必是椭圆的.

4. 如果 S 是双曲的或斜驶的，试证明当 $n\to\infty$ 时 $S^n z$ 收敛到一个不动点，对所有的 z，除了 z 与另一个不动点重合外都如此. (极限情形的这个不动点是吸收的，另一不动点是排斥的. 当 $n\to-\infty$ 时会发生什么情况? 在抛物情形又如何?)

5. 试求表示 Riemann 球面旋转的所有线性变换.

6. 求所有与 $|z|=1$ 及 $|z-1|=4$ 直交的圆.

7. 一族变换以明显的方式(我们不准备精确叙述)依赖于某一数量的实参数. 在所有线性变换的族中，试问一共有多少个实参数? 在椭圆、双曲、抛物变换族中各有多少?有多少线性变换把一给定的圆 C 保持不变?

4　初等共形映照

与解析函数相联系的共形映照为解析函数的性质提供了一个极好的形象；这与实函数用图象来形象化的情形十分相仿．因此，一切与共形映照有关的问题自然应受到特别重视；在这一方面的进展大大增加了我们对解析函数的知识．此外，共形映照还自然地出现在数学物理的许多分支中，这正是直接要用到复变函数论的原因．

这里最重要的问题之一就是要确定一个域映成另一个域的共形映照．在这一节里，我们将研究一些可以由初等函数来定义的映照．

4.1　阶层曲线的应用

当一个共形映照由一解析的显函数 $w=f(z)$ 来定义的时候，我们自然要知道映照的特殊几何性质．要做到这一点，最有效的方法之一就是去研究由点的变换所引起的曲线之间的对应关系．函数 $f(z)$ 的特性由于某些简单曲线变换为具有熟知特性的曲线族中的曲线而可自行表达出来．任何这样的知识都将加强我们关于映照的具体概念．

用线性变换所作的映照就是这种情形．在第 3 节中我们曾证明，只要我们把直线作为圆的一个特殊情形来看，那么线性变换就把圆变为圆．通过对 Steiner 圆的研究，我们就可能得到关于对应关系的一个完整的图象．

对于更一般的情形，最好是从直线 $x=x_0$ 及 $y=y_0$ 的象曲线的研究入手．如令 $f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$，则 $x=x_0$ 的象由参数方程 $u=u(x_0, y)$，$v=v(x_0, y)$ 表示；这里 y 相当于一个参数，它可以消去或保留，视方便而定．$y=y_0$ 的象也可同样确定．这些曲线共同在 w 平面上组成一正交网．同理，我们可以研究 z 平面上的曲线 $u(x, y)=u_0$ 及 $v(x, y)=v_0$．它们也是正交的，分别称

为 u 及 v 的阶层曲线.

在其他情形下，应用极坐标并研究同心圆及通过原点的直线的象可能更方便些.

最简单的映照之一是由幂函数 $w=z^{\alpha}$ 所作的象. 我们这里只考虑 α 为实数的情形，因此不妨设 α 是正数. 由于

$$|w|=|z|^{\alpha},$$

$$\arg w=\alpha\arg z,$$

所以围绕原点的同心圆变换为同族的圆，由原点引出的半直线对应于另外的一些半直线. 在所有不等于零的点 z 上，映象都是共形的，但张于原点的一个角 θ 变换为一个角 $\alpha\theta$. 对于 $\alpha\neq 1$，整个平面的变换不是一对一的，而如 α 为分数，则 z^{α} 还不是单值的. 因此，一般说来，我们只能考虑一个扇形映成另一扇形的映照.

扇形 $S(\varphi_1, \varphi_2)(0<\varphi_2-\varphi_1\leqslant 2\pi)$ 是由所有满足下列条件的点 z 组成：$z\neq 0$，且 $\arg z$ 的一个值满足不等式

$$\varphi_1<\arg z<\varphi_2. \tag{15}$$

容易证明 $S(\varphi_1, \varphi_2)$ 是一个域. 在这一域中，$w=z^{\alpha}$ 的一个唯一的值由条件

$$\arg w=\alpha\arg z$$

所定义，其中 $\arg z$ 代表由条件(15)所界定的幅角的值. 这一函数是解析的，具有非零导数

$$De^{\alpha\log z}=\alpha\frac{w}{z}.$$

映照仅在 $\alpha(\varphi_2-\varphi_1)\leqslant 2\pi$ 时是一对一的，这时，扇形 $S(\varphi_1, \varphi_2)$ 映成 w 平面上的扇形 $S(\alpha\varphi_1, \alpha\varphi_2)$. 应当注意，$S(\varphi_1+n\cdot 2\pi, \varphi_2+n\cdot 2\pi)$ 在几何上是与 $S(\varphi_1, \varphi_2)$ 完全一样的，但可以确定 z^{α} 的一个不同的分支.

现在我们来更详细地研究映照 $w=z^2$. 因为 $u=x^2-y^2$，$v=2xy$，故知阶层曲线 $u=u_0$ 及 $v=v_0$ 都是等边双曲线，以分角线及坐标轴为渐近线. 它们当然是互相正交的. 另一方面，$x=x_0$ 的象是 $v^2=4x_0^2(x_0^2-u)$，$y=y_0$ 的象是 $v^2=4y_0^2(y_0^2+u)$. 这两族都是

抛物线，以原点为焦点，它们的轴分别指向 u 轴的负向及正向．从解析几何学可知它们是正交的．阶层曲线族如图 3-5 及 3-6 所示．

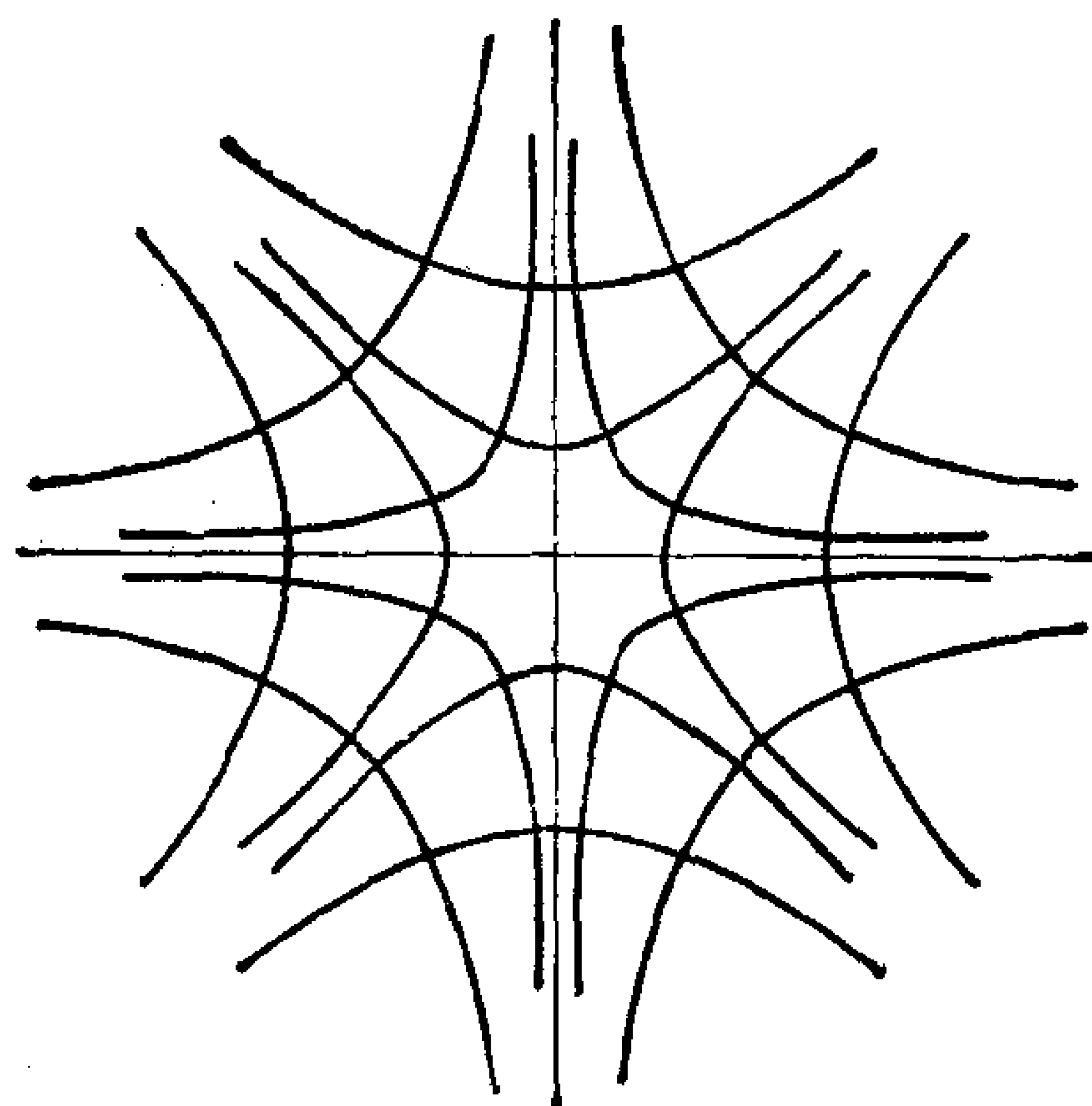


图 3-5　z 平面

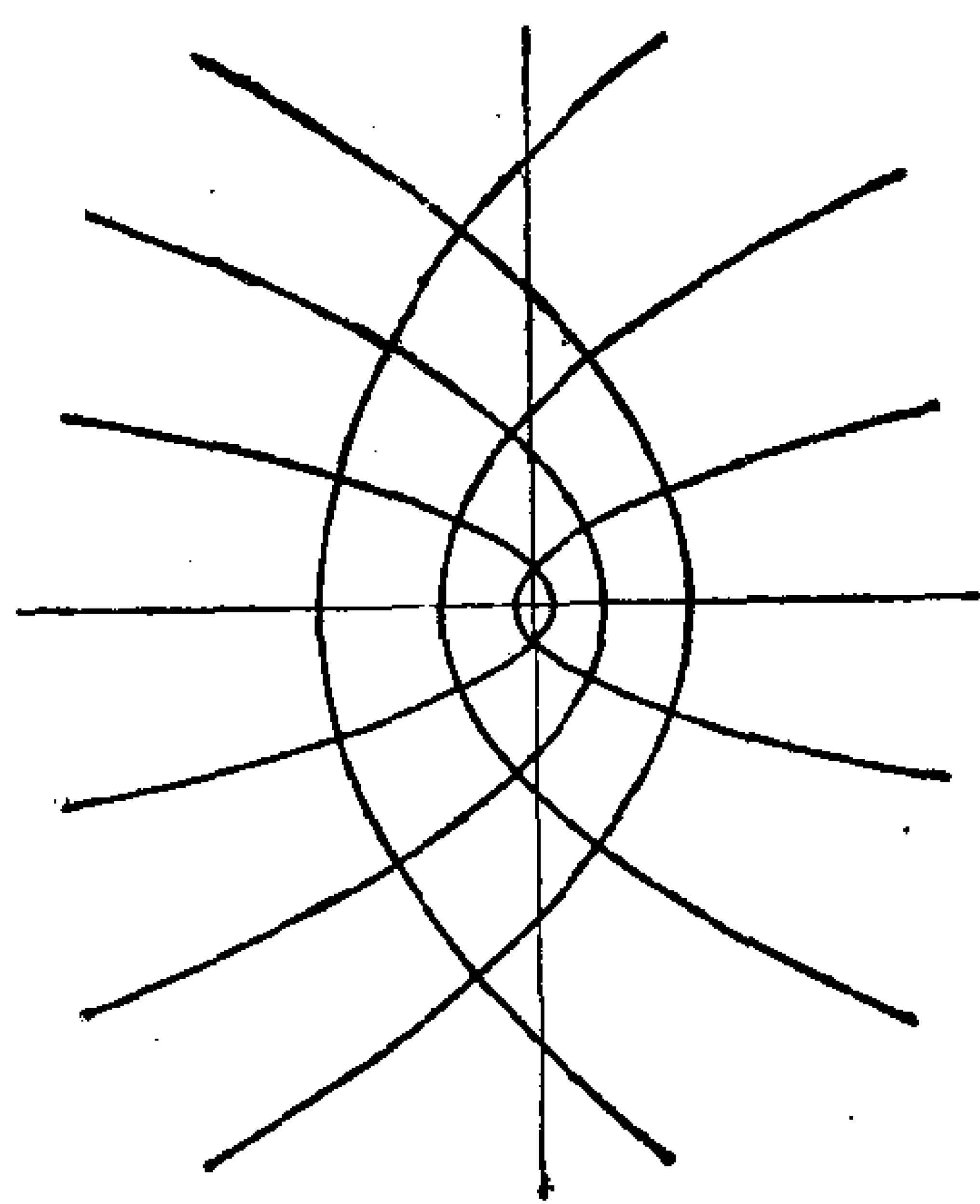


图 3-6　w 平面

为了研究其他不同的象曲线族，我们考虑 w 平面中的圆 $|w-1|=k$．原象的方程可以写成

$$(x^2+y^2)^2=2(x^2-y^2)+k-1,$$

它表示一族以 ± 1 为焦点的双纽线．正交族为

$$x^2-y^2=2kxy+1.$$

这是一族通过点 ± 1 并以原点为中心的等边双曲线．

在三次幂 $w=z^3$ 的情形，两平面上的阶层曲线都是三次曲线．

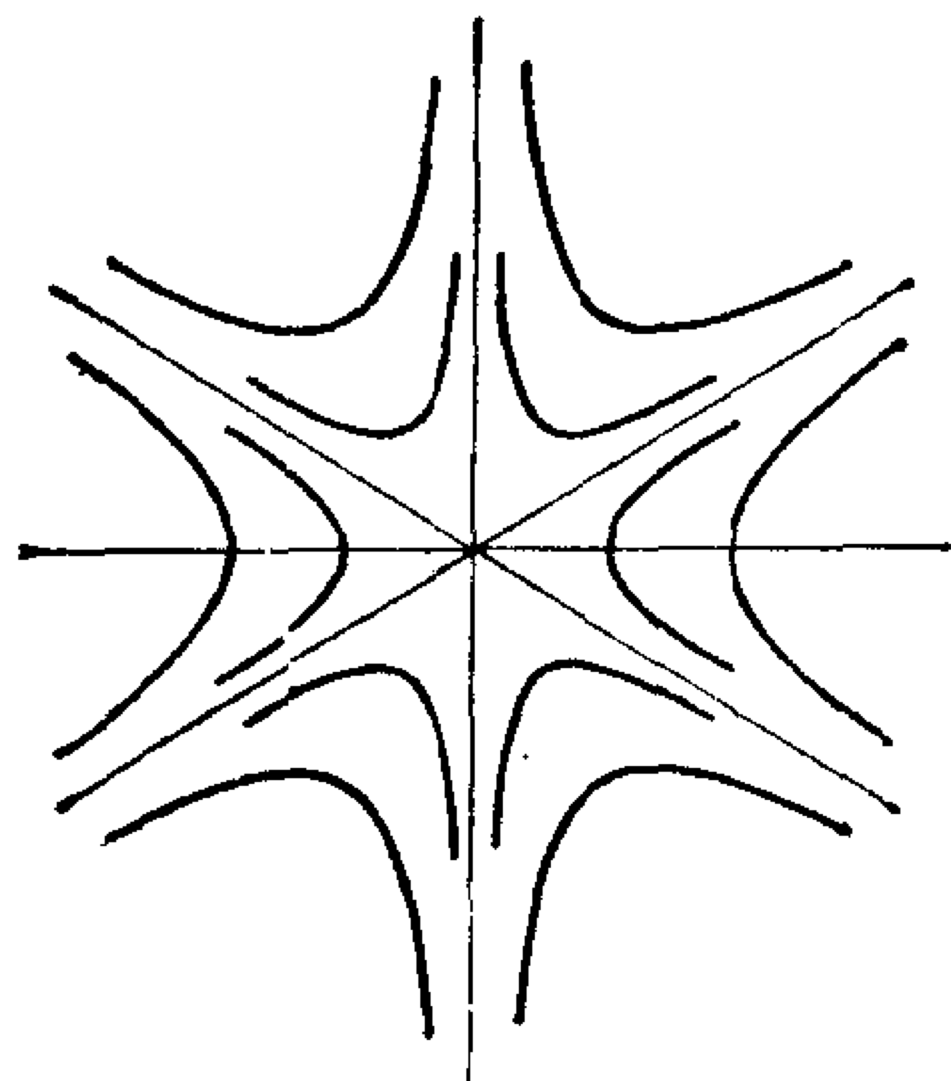


图 3-7

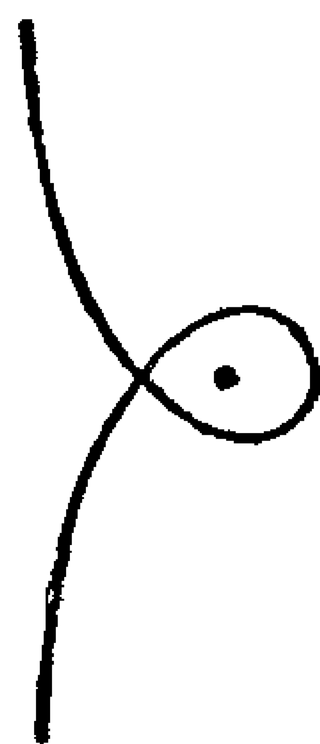


图 3-8

没有必要导出它们的方程，因为它们的一般形状不加计算就是很清楚的。例如，曲线 $u=u_0>0$ 应有图 3-7 所示的形状。同样，如当 z 画出线 $x=x_0>0$ 时看 $\arg w$ 的变化，则知象曲线应具有一个回环(图 3-8)。因此它是 Descartes 叶形线。

用 $w=e^z$ 所作的映照是很简单的。线 $x=x_0$ 及 $y=y_0$ 映成以原点为中心的圆及幅角一定的射线。在 z 平面上的任何其他直线映成对数螺线。这个映照在任何一个域内都是一对一的，只要这个域中任意两点之差不等于 $2\pi i$ 的倍数。特别是，水平的带 $y_1<y<y_2$，$y_2-y_1\leqslant 2\pi$ 映成一个扇形，如果 $y_2-y_1=\pi$，则象是一个半平面。这样，我们就可以把一平行的带映成一个半平面，从而映成任一圆形的域。带在虚轴左边的一半对应于一个半圆

这里，我们写出几个映照的显式是有用的。函数 $\zeta=\xi+i\eta=e^z$ 将带 $-\pi/2<y<\pi/2$ 映成半平面 $\xi>0$、另一方面，

$$w=\frac{\zeta-1}{\zeta+1}$$

将 $\xi>0$ 映成 $|w|<1$。因此

$$w=\frac{e^z-1}{e^z+1}=\tanh\frac{z}{2}.$$

4.2 初等映照概说

当我们处理将一个域 Ω_1 共形地映成另一个域 Ω_2 的问题的时候，通常最好分两步进行。首先，把 Ω_1 映成一圆形的域，而后把圆形的域映成 Ω_2。换句话说，共形映照的一般问题可以化为将一域映成圆盘或半平面的问题。在第 6 章中，我们将证明这一映照问题对于每一个以简单闭曲线为边界的域恒有一个解。

在我们处理问题中所用到的主要工具是线性变换、幂变换、指数函数变换和对数变换。所有这些变换都有一个共同的特征，那就是将某一直线族或圆族映成相似的族。因此，它们的用途将主要限于以圆弧或线段为边界的域。幂变换可特别用于矫正角度，而指数函数则可用以将平行的带角变成扇形。

利用这些方法，我们首先可以求得一个以两条共端点的圆弧为边界的任意域的标准映照．这样的域可以是一个圆楔形，它的角可以大于 π，或者也可以是它的余补形．设二弧的端点为 a 及 b，我们先作预备映照 $z_1=(z-a)/(z-b)$，将所给域映成一扇形．再用一适当的幂 $w=z_1^\alpha$ 就可将这一扇形映成一个半平面．

如果两个圆在点 a 互切，则变换 $z_1=1/(z-a)$ 将把两圆间的域映成一平行带，而后用一适当的指数变换将带映成半平面．

更一般些，同样的方法也可应用于具有两个直角的圆三角形．事实上，如果第三角的顶点为 a，且设由 a 引出的两边再交于 b，则线性变换 $z_1=(z-a)/(z-b)$ 将三角形映成一扇形．用一个幂变换可将这一扇形变换为一个半圆；这一半圆是一楔形域，它又可映成一个半平面．

在这一方面，我们来讨论一个经常遇到的特殊情形．设我们需要将一个线段的余补域映成一个圆的内部或外部．这个域是角为 2π 的楔形；不失一般性，可设线段的端点为 ±1．预备变换

$$z_1=\frac{z+1}{z-1}$$

将楔形映成一个除去负实轴所得的全扇形．其次，定义平方根

$$z_2=\sqrt{z_1},$$

它的实部是正的，从此得到将全扇形映成右半平面的映照．最后，变换

$$w=\frac{z_2-1}{z_2+1}$$

把右半平面映成 $|w|<1$．

消去中间变数后可得对应关系

$$\begin{aligned} z&=\frac{1}{2}\left(w+\frac{1}{w}\right),\\ w&=z-\sqrt{z^2-1}. \end{aligned} \tag{16}$$

平方根的符号可以由条件 $|w|<1$ 唯一地确定，因为 $(z-\sqrt{z^2-1})\cdot(z+\sqrt{z^2-1})=1$．如符号相反，则得映成 $|w|>1$ 的映照．

为了更详细地研究映照(16)，令 $w=\rho e^{i\theta}$，这样就得

$$x=\frac{1}{2}\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right)\cos\theta,$$

$$y=\frac{1}{2}\left(\rho-\frac{1}{\rho}\right)\sin\theta.$$

消去 θ，得

$$\frac{x^2}{\left[\frac{1}{2}(\rho+\rho^{-1})\right]^2}+\frac{y^2}{\left[\frac{1}{2}(\rho-\rho^{-1})\right]^2}=1, \tag{17}$$

又消去 ρ，得

$$\frac{x^2}{\cos^2\theta}-\frac{y^2}{\sin^2\theta}=1. \tag{18}$$

因此，圆 $|w|=\rho<1$ 的象是一椭圆，长轴为 $\rho+\rho^{-1}$，短轴为 $\rho^{-1}-\rho$. 一半径的象是双曲线一支的一半. 椭圆(17)及双曲线(18)是共焦的. 对应关系如图 3-9 所示.

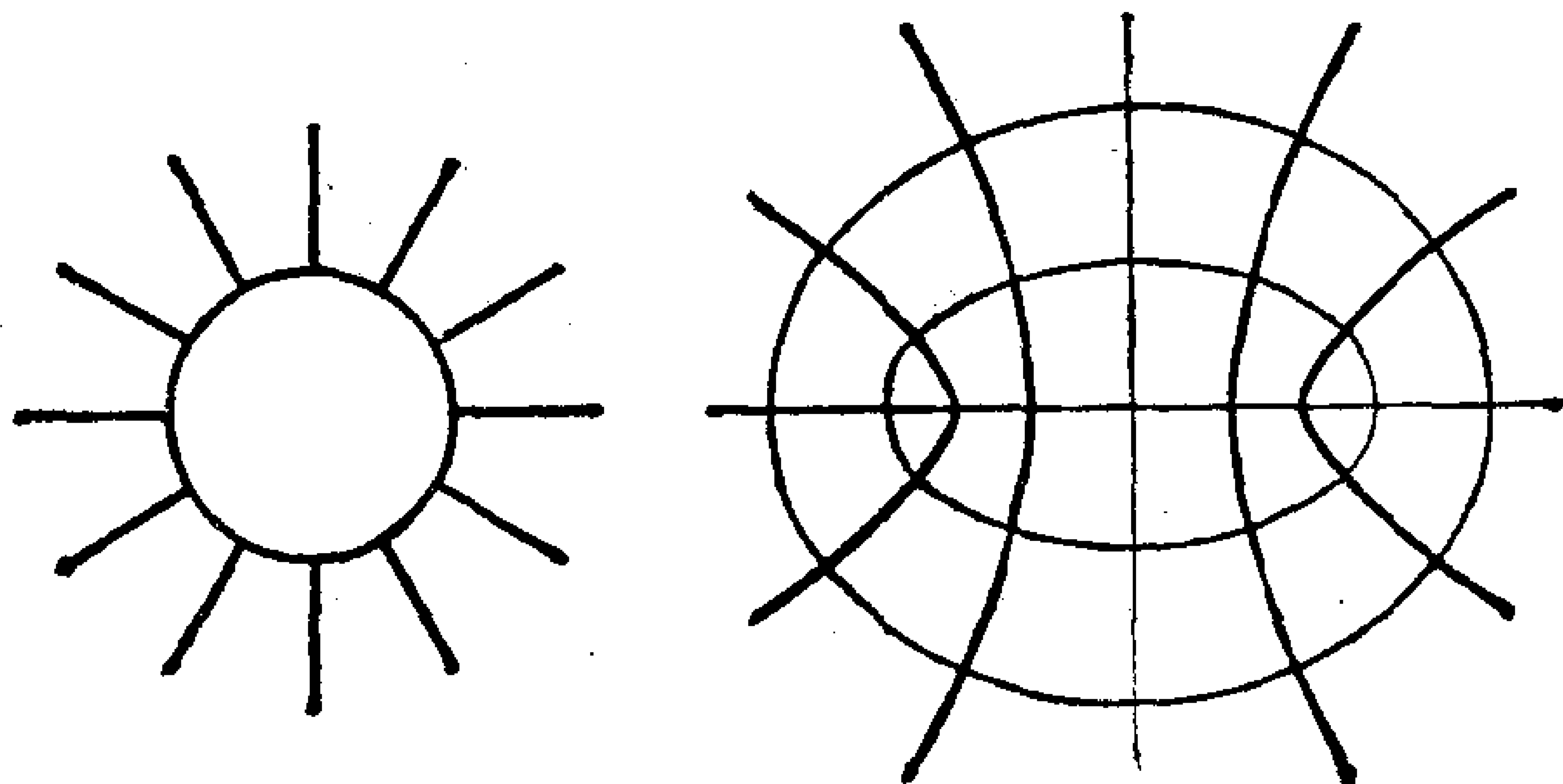


图 3-9　由 $z=\frac{1}{2}(w+w^{-1})$ 所作的映照

很明显，由于变换(16)，我们可以把一个椭圆的外部或一双曲线二支之间的域映成一圆域的映照也归属于初等共形映照一类里. 但是，这一变换却不能使我们作椭圆内部或双曲线两分支内部的映照.

作为一个最后比较复杂的例子，我们来研究三次多项式

$$w=a_0z^3+a_1z^2+a_2z+a_3$$

所定义的映照. 利用熟知的变换 $z=z_1-a_1/3a_0$ 可消去方程中的二次项，经规格化以后，多项式可化为 $w=z^3-3z$. z 的系数是这样选定的，使导数在 $z=\pm1$ 时等于零.

为了应用变换式(16)，引进辅助变数ζ，ζ由下式定义

$$z=\zeta+\frac{1}{\zeta}.$$

于是三次多项式简化为

$$w=\zeta^3+\frac{1}{\zeta^3}.$$

我们看到每一个z确定两个ζ的值，但它们是互倒的，因而可导致同一个w值．为了求得一个唯一的ζ，可以加入条件$|\zeta|<1$，但这样以后，线段$(-2, 2)$必须从z平面上除去．

现在我们容易将z平面与w平面之间的对应关系加以具体化．与圆$|\zeta|=\rho<1$对应的，在z平面中是以$\rho^{-1}\pm\rho$为半轴的椭圆，而在w平面中则是以$\rho^{-3}\pm\rho^3$为半轴的椭圆．同样，圆的一个半径$\arg\zeta=\theta$对应于z平面及w平面中的双曲线的分支；z平面中的双曲线以与正实轴的夹角为$-\theta$的直线为一渐近线，而w平面中的双曲线的一条渐近线则与正实轴的夹角为-3θ．共焦椭圆和双曲线的整个形状保持不变，但在z描出一椭圆时，w将画出对应的较大椭圆三次．因此，这里的情形和较简单的映照$w=z^3$的情形十分相似．至于取向，可参看图3-9．

对于渐近线之间的夹角$\leqslant 2\pi/3$的双曲线，介于其二分支之间的域的映照是一对一的．特别是，双曲线$3x^2-y^2=3$和x轴把z平面分成的六个域都映成半平面，其中三个映成上半平面，而另外三个映成下半平面．双曲线的右面一个分支的内部对应于整个w平面，但沿着负实轴到-2为止的一段有一缺口．

习　题

下面所有的映照都应是共形的：

1．试将圆盘$|z|<1$及$|z-1|<1$的公共部分映成单位圆的内部，选取映照使保持两种对称性．

2．试将$|z|=1$及$\left|z-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$之间的域映成一个半平面．

3．试将弧 $|z|=1, y\geqslant 0$ 的余补域映成单位圆的外部，使无穷远点互相对应.

4．试将抛物线 $y^2=2px$ 的外部映成圆盘 $|w|<1$，使 $z=0$ 及 $z=-p/2$ 对应于 $w=1$ 及 $w=0$.（Lindelöf.）

5．试将双曲线 $x^2-y^2=a^2$ 的右边分支的内部映成圆盘 $|w|<1$，使焦点对应于 $w=0$，顶点对应于 $w=-1$.（Lindelöf.）

6．试将双纽线 $|z^2-a^2|=\rho^2(\rho>a)$ 的内部映成圆盘 $|w|<1$，使对称性不变.（Lindelöf.）

7．试将椭圆 $(x/a)^2+(y/b)^2=1$ 的外部映成圆盘 $|w|<1$，使对称性不变.

8．试将 z 平面在双曲线 $x^2-y^2=1$ 右半支左面的部分映成一个半平面.（Lindelöf.）

［提示：一方面考虑域的上半部分在 $w=z^2$ 下的映照，另一方面考虑一个象限在 $w=z^3-3z$ 下的映照.］

4.3 初等 Riemann 面

用相应的映照将函数形象化的情形仅当映照为一对一时才是完全清晰的．如果映照不是一对一的，那么，引进广义的域之后仍可使我们的设想得到必要的支持，所谓广义域就是在其中不同的点可以具有相同的坐标．为了做到这一点，必须规定同一位置上的点可以用其他特征来加以区别，例如它们的标号或它们的颜色．具有相同标号的各个点被认为位于同一叶或同一层．

这一想法引出了 Riemann 面的概念．这里我们不想给这一概念下一个严格的定义，就我们的目的来说，以纯粹描述的方式介绍一下 Riemann 面就够了．因为我们只用以帮助说明，不用以作逻辑的证明．

最简单的 Riemann 面与 $w=z^n$ 所作的映照有关，这里 $n>1$ 是一整数．我们知道在每一个扇形 $(k-1)(2\pi/n)<\arg z<k(2\pi/n)$ $(k=1, \cdots, n)$ 与除去了正实轴以后的整个 w 平面之间存在着一一对应的关系．因此，每一扇形的象可以在 w 平面上沿着正实轴作一"割痕"而求得；这一割痕具有两个"边缘"，一在下方，一在上

方．对应于 z 平面中的 n 个扇形，我们来考察具有割痕的 w 平面的 n 个完全相同的复本．这些复本将组成 Riemann 面的"叶"，不同的叶用标号 k 区分，每一标号对应于一个扇形．当 z 在 z 平面上移动时，对应的点 w 将在 Riemann 面上自由移动．由于这一理由，我们必须把第一叶的下边缘接到第二叶的上边缘，第二叶的下边缘接到第三叶的上边缘，依此类推，到最后，将第 n 叶的下边缘接到最初一叶的上边缘，完成一个循环．从物理意义上看，这样做就不可能不发生自交，但我们理想化的模型没有这一矛盾，这样构作的结果就组成一 Riemann 面，它上面的点与 z 平面上的点成一一对应．此外，如果连续性是根据结构情况来定义的，那么这一对应也是连续的．

沿着正轴的割痕可以用沿着任意一段由 0 至 ∞ 的简单弧的割痕来代替；这样构成的 Riemann 面应认为与原来构成的一个完全一样．换言之，割痕不能由曲面上的线来区分，但为了便于描述，引进特殊的割痕还是必要的．

点 $w=0$ 处于一特殊位置．它连接所有的叶，而一条曲线在闭合之前应环绕原点 n 次．这样的一个点称为支点．如果 Riemann 面是从扩充平面来考虑的，那么 ∞ 点也是一支点．在更一般的情形，一个支点不须要连接所有各个叶；如果它连接的有 h 叶，则称它为 $h-1$ 阶支点．

对应于 $w=e^z$ 的 Riemann 面具有同样的本质．在这种情况下，这一函数将每一平行带 $(k-1)2\pi<y<k\cdot 2\pi$ 映成一叶，割痕是沿正轴切下的．各叶彼此相连，因此组成一个没有尽头的螺旋．原点将不是 Riemann 面上的一点，这与 e^z 永远不能等于零相应．

读者当不难构作其他的 Riemann 面．我们提出 $w=\cos z$ 所定义的 Riemann 面来作为方法的说明．如果一个域，在一一对应下映成为具有一个或几个割痕的整个平面，则称这个域为基本域．我们可以选定带 $(k-1)\pi<x<k\pi$ 作为 $w=\cos z$ 的基本域．每一带映成带有割痕的整个 w 平面，这些割痕是沿着实轴由 $-\infty$ 至 -1 以及由 1 至 ∞ 刻凿的．直线 $x=k\pi$ 在 k 为偶数时对应于正

向割痕的二边缘；而在 k 为奇数时则对应于负向割痕的二边缘．如果我们考察与直线 $x=k\pi$ 相邻的二条带，就知道对应割痕的边缘应交叉粘合，以便在 $w=\pm1$ 处生成一单支点．所得的曲面在 $w=1$ 及 $w=-1$ 上具有无穷多个单支点，这些支点交替地连接奇数和偶数的叶．

叶与叶的粘合情形如图 3-10 所示．它表示割痕互相平行时的曲面的横截面．应记住同一水平线上的任何二点都可以用一弧来连接，弧不与任一割痕相交．

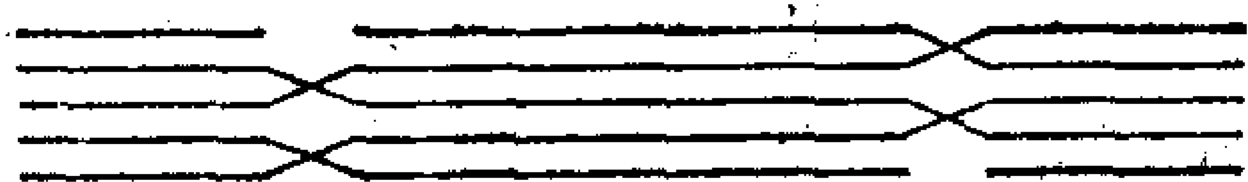


图 3-10　$\cos z$ 的 Riemann 面

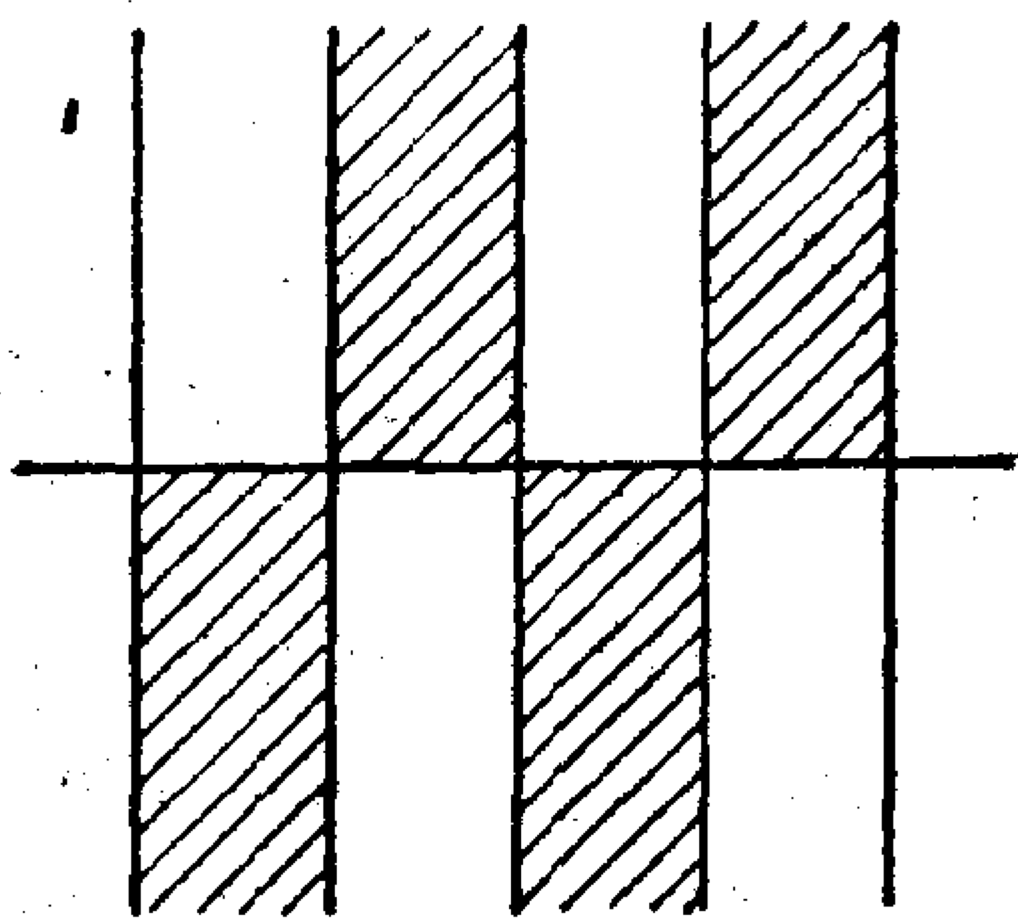


图 3-11　$\cos z$ 的基本域

不论这种表示的优点怎样，Riemann 面的最清晰图形是从 z 平面中基本域的直接研究中得出．如图 3-11 所示，如果我们引用对应于上半平面及下半平面的子域，则说明将更为简单．图中阴影部分是 $\cos z$ 具有正虚部的域．每一域对应于一个半平面，在这个半平面上记明界点 1 及 -1．对于任意两个黑白相邻的域，半平面应通过区间 $(-\infty, -1)$、$(-1, 1)$ 或 $(1, \infty)$ 之一相连接．应该选定哪一个连接，可从 z 平面中的对应位置来决定．

习　题

1．说明函数 $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ 的 Riemann 面．

2．说明函数 $w=(z^2-1)^2$ 的 Riemann 面．

3．说明函数 $w=z^3-3z$ 的 Riemann 面．

第4章 复 积 分

1 基 本 定 理

解析函数的许多重要性质不用复积分是很难证明的．举例来说，不借助复积分或等价工具，要证明一个解析函数的导数是连续的，或证明高阶导数存在，仅在最近才成为可能．当前．不用积分的证明，至少可以说，比古典证明，要困难得多❶．

正象在实变数的情形中一样，我们仍区分定积分和不定积分．一个不定积分是一个函数，它的导数等于一个域内的已知解析函数；在许多初等情形中，不定积分可以从已知导微公式的反演求得．定积分是在可微弧段或逐段可微弧段上进行的，并不限于解析函数．它可以用实定积分定义中类似的极限法来定义．实际上，我们将应用实积分来定义复的定积分．这就使我们可以不必重复作存在性的证明，因为它在基本上是和实变数的情形相同的．读者应对实值连续函数的定积分理论十分熟悉．

1.1 线积分

实积分的最直接推广就是一个复值函数在一个实区间上的定积分．设$f(t)=u(t)+iv(t)$是一个连续函数，定义于区间(a, b)内．根据定义，令

$$\int_a^b f(t)dt=\int_a^b u(t)dt+i\int_a^b v(t)dt. \tag{1}$$

❶ R. L. Plunkett 不用积分证明了导数的连续性 (Bull. Am. Math. Soc. **65**, 1959). E. H. Connell 和 P. Porcelli 证明了所有导数的存在 (Bull. Am. Math. Soc. **67**, 1961). 所有这些证明都依赖 G. T. Whyburn 的一个拓扑定理．

这一积分具有实积分的大部分性质. 特别是, 如 $c=\alpha+i\beta$ 为一复常数, 则得

$$\int_a^b cf(t)dt=c\int_a^b f(t)dt, \tag{2}$$

因为两边都等于

$$\int_a^b (\alpha u-\beta v)dt+i\int_a^b (\alpha v+\beta u)dt.$$

如果 $a\leqslant b$, 则对于任意复的 $f(t)$, 基本不等式

$$\left|\int_a^b f(t)dt\right|\leqslant\int_a^b |f(t)|dt \tag{3}$$

成立. 为了证明这一点, 在(2)中取 $c=e^{-i\theta}$, 这里 θ 为实数, 则得

$$\operatorname{Re}\left[e^{-i\theta}\int_a^b f(t)dt\right]=\int_a^b \operatorname{Re}[e^{-i\theta}f(t)]dt\leqslant\int_a^b |f(t)|dt.$$

如 $\theta=\arg\int_a^b f(t)dt$, 则上式的左边成为积分的绝对值, 于是得(3) ❶.

现在我们来考察一个分段可微的弧段 γ, 其方程为 $z=z(t)$, $a\leqslant t\leqslant b$. 如果函数 $f(z)$ 定义在 γ 上且在 γ 上连续, 则 $f(z(t))$ 也连续, 我们可以令

$$\int_\gamma f(z)dz=\int_a^b f(z(t))z'(t)dt. \tag{4}$$

这就是 $f(z)$ 沿着弧段 γ 的复线积分的定义. 在(4)式的右边, 如果 $z'(t)$ 不是到处连续, 则积分区间应根据情况分成几个小区间. 当我们考虑弧段 γ 上的线积分的时候, 我们总默认 γ 是逐段可微的.

积分(4)的一个最重要的性质是它在参数变换下的不变性. 由增函数 $t=t(\tau)$ 确定的参数变换将区间 $\alpha\leqslant\tau\leqslant\beta$ 映成区间 $a\leqslant t\leqslant b$; 假设 $t(\tau)$ 是逐段可微的. 根据积分变数的变换法则, 我们有

$$\int_a^b f(z(t))z'(t)\,dt=\int_\alpha^\beta f(z(t(\tau)))z'(t(\tau))t'(\tau)d\tau.$$

但 $z'(t(\tau))t'(\tau)$ 是 $z(t(\tau))$ 关于 τ 的导数, 因此, 不论 γ 的方程为

❶ 如 $\int_a^b f\,dt=0$, 则 θ 没有定义, 但这时也就没有什么要证明了.

$z=z(t)$，抑或为 $z=z(t(\tau))$，积分(4)都有相同的值.

在第3章2.1节中，我们用方程 $z=z(-t)$，$-b\leqslant t\leqslant -a$ 定义反向弧段 $-\gamma$. 因此我们有

$$\int_{-\gamma} f(z)dz=\int_{-b}^{-a} f(z(-t))(-z'(-t))dt,$$

作变数变换，上面的积分可写成

$$\int_{b}^{a} f(z(t))z'(t)dt.$$

于是得到

$$\int_{-\gamma} f(z)dz=-\int_{\gamma} f(z)dz. \tag{5}$$

积分 (4) 还有一个十分明显的加法性质. 把弧段 γ 分成有穷个子弧段的意义是很明显的. 用符号方程来表示，就有

$$\gamma=\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_n,$$

对应的积分满足下面的关系

$$\int_{\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_n} f\,dz=\int_{\gamma_1} f\,dz+\int_{\gamma_2} f\,dz+\cdots+\int_{\gamma_n} f\,dz. \tag{6}$$

最后，沿着一条闭曲线的积分在参数移换下也保持不变. 老的和新的起点确定两段子弧 γ_1 及 γ_2，沿 $\gamma_1+\gamma_2$ 的积分等于沿 $\gamma_2+\gamma_1$ 的积分，这就证明了积分的不变性.

除了(4)式这种形式的积分外，我们还可以考虑关于 $\bar{z}$ 的线积分. 最方便的定义是用二重共轭符号

$$\int_{\gamma} f\overline{dz}=\overline{\int_{\gamma} \bar{f}\,dz}.$$

应用这一记法，关于 x 或关于 y 的线积分可以写成

$$\int_{\gamma} f\,dx=\frac{1}{2}\left(\int_{\gamma} f\,dz+\int_{\gamma} f\overline{dz}\right),$$

$$\int_{\gamma} f\,dy=\frac{1}{2i}\left(\int_{\gamma} f\,dz-\int_{\gamma} f\overline{dz}\right).$$

以 $f=u+iv$，则(4)式的积分可写成下面的形式：

$$\int_{\gamma}(u\,dx-v\,dy)+i\int_{\gamma}(u\,dy+v\,dx), \tag{7}$$

它把实部和虚部分了开来.

当然,我们完全可以从定义如下形式的积分开始:

$$\int_{\gamma} p\,dx+q\,dy,$$

在这情况下,(7)应作为积分(4)的定义. 选用哪一种,完全是一种尝试.

关于弧长作积分可得一个基本上不同的线积分. 这种积分普通用两种记法,其定义为

$$\int_{\gamma} f\,ds=\int_{\gamma} f|dz|=\int_{\gamma} f(z(t))|z'(t)|dt. \tag{8}$$

这一积分仍然不依赖于参数的选择. 和(5)式对比,现在我们有

$$\int_{-\gamma} f|dz|=\int_{\gamma} f|dz|,$$

但(6)式仍保持有效. 不等式

$$\left|\int_{\gamma} f\,dz\right|\leqslant\int_{\gamma}|f|\cdot|dz| \tag{9}$$

是(3)式的一个推论.

如 $f=1$, 则(8)的积分化为 $\int_{\gamma}|dz|$, 根据定义, 这就是 γ 的长度. 我们来计算圆的周长作为例子. 从一个整圆的参数方程 $z=z(t)=a+\rho e^{it}$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$, 可得 $z'(t)=i\rho e^{it}$, 因此

$$\int_{0}^{2\pi}|z'(t)|dt=\int_{0}^{2\pi}\rho\,dt=2\pi\rho,$$

与我们所希望的一致.

1.2 可求长的弧

一段弧的长度也可以定义为所有和

$$|z(t_1)-z(t_0)|+|z(t_2)-z(t_1)|+\cdots+|z(t_n)-z(t_{n-1})| \tag{10}$$

的上确界, 其中 $a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$. 如果这个上确界是有穷的,就说这弧是可求长的. 易证逐段可微的弧是可求长的,而且长度的两种定义是一致的.

由于 $\quad |x(t_k)-x(t_{k-1})|\leqslant|z(t_k)-z(t_{k-1})|,$

$$|y(t_k)-y(t_{k-1})|\leqslant|z(t_k)-z(t_{k-1})|,$$
$$|z(t_k)-z(t_{k-1})|\leqslant|x(t_k)-x(t_{k-1})|+|y(t_k)-y(t_{k-1})|,$$
显见，和(10)及相应的和
$$|x(t_1)-x(t_0)|+\cdots+|x(t_n)-x(t_{n-1})|,$$
$$|y(t_1)-y(t_0)|+\cdots+|y(t_n)-y(t_{n-1})|$$
同时有界．当后面的和都有界时，就说函数 $x(t)$ 与 $y(t)$ 是有界变差的．一弧 $z=z(t)$ 是可求长的，当且仅当 $z(t)$ 的实部与虚部都是有界变差的．

若 γ 是可求长的，$f(z)$ 在 γ 上连续，则可定义类型(8)的积分为极限
$$\int_\gamma f\,ds=\lim\sum_{k=1}^{n}f(z(t_k))\,|z(t_k)-z(t_{k-1})|.$$
这里的极限与定积分定义中出现的极限是同类型的．

在初等解析函数论中，很少需要考虑可求长而不是逐段可微的弧．但是，可求长弧这个概念是每个数学家必须知道的一个概念．

1.3 线积分作为弧的函数

形如 $\int_\gamma p\,dx+q\,dy$ 的一般线积分常作为弧 γ 的函数(或泛函)来研究．这时我们假设 p 与 q 定义在同一域 Ω 内，并在 Ω 内连续，而弧 γ 在 Ω 内是任意的．一类重要的积分以下面的一种性质为其特征，那就是沿弧段的积分值只依赖于弧段的两端点．换言之，如果 γ_1、γ_2 具有相同的起点与终点，则这一性质可表为
$$\int_{\gamma_1}p\,dx+q\,dy=\int_{\gamma_2}p\,dx+q\,dy.$$
我们说一个积分只依赖于两端点就等于说沿着任一闭曲线的积分值等于零．事实上，设 γ 为一闭曲线，则 γ 与 $-\gamma$ 具有相同的端点，而如积分只依赖于端点，则
$$\int_\gamma=\int_{-\gamma}=-\int_\gamma,$$

因此 $\int_\gamma=0$. 反之，如果 γ_1、γ_2 具有相同的端点，则 $\gamma_1-\gamma_2$ 是一条闭曲线，而如沿着任一闭曲线的积分等于零，则 $\int_{\gamma_1}=\int_{\gamma_2}$.

下面的定理给出了线积分只依赖于两端点的一个充要条件.

定理 1 定义在 Ω 内的线积分 $\int_\gamma p\,dx+q\,dy$ 只依赖于 γ 的两端点的充分必要条件是：在 Ω 内存在一函数 $U(x, y)$，它具有偏导数

$$\frac{\partial U}{\partial x}=p,\quad \frac{\partial U}{\partial y}=q.$$

条件的充分性是立即可以看出的，因为如果定理的条件被满足，则用通常的记号，可以有

$$\begin{aligned}\int_\gamma p\,dx+q\,dy&=\int_a^b\left(\frac{\partial U}{\partial x}x'(t)+\frac{\partial U}{\partial y}y'(t)\right)dt\\&=\int_a^b\frac{d}{dt}U(x(t),\ y(t))dt\\&=U(x(b),\ y(b))-U(x(a),\ y(a)),\end{aligned}$$

而这一差的值只依赖于两端点。为了证明必要性，在 Ω 内任取一固定点 $(x_0,\ y_0)$，用 Ω 内的折线 γ 连接 $(x_0,\ y_0)$ 与 $(x,\ y)$，γ 的边平行于坐标轴，如图 4-1 所示，并定义函数

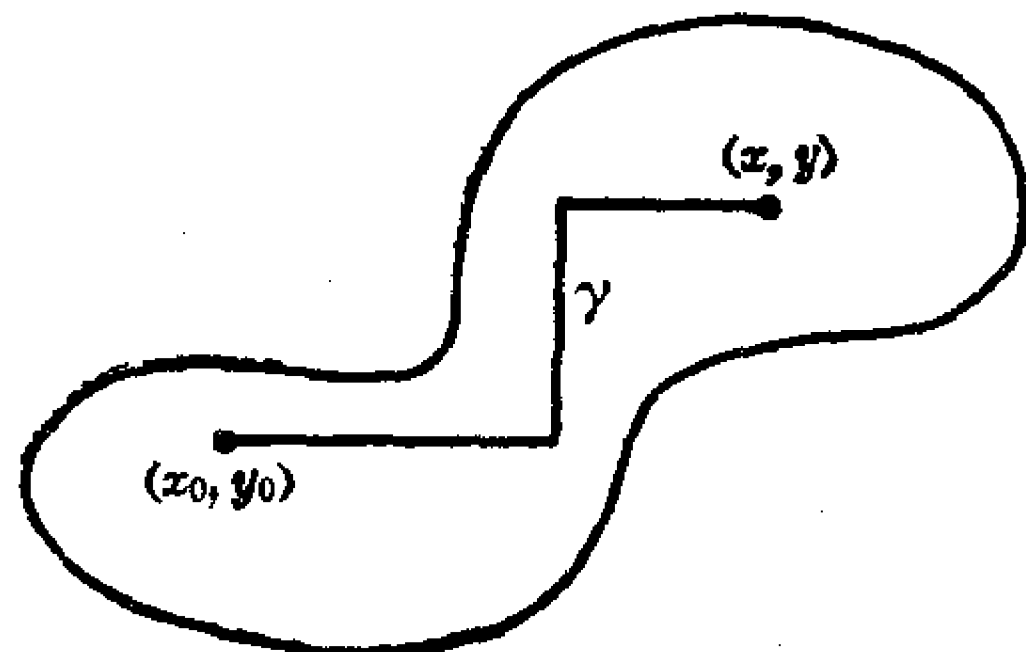


图 4-1

$$U(x,\ y)=\int_\gamma p\,dx+q\,dy.$$

由于积分只依赖于两端点，故知函数 U 是确切地定义了的. 又如取 γ 的最后一段为水平的，则可将 y 保持固定而让 x 一数变化，并不影响到其他的线段. 在最后一段上，可视 x 为参数，得到

$$U(x,\ y)=\int^x p(x,\ y)dx+\text{const.},$$

这里，积分的下限是无关重要的. 从上式立即可得 $\frac{\partial U}{\partial x}=p$. 同理，取 γ 的最后一段平行于 y 轴，可证 $\frac{\partial U}{\partial y}=q$.

习惯上,我们常写

$$dU=\frac{\partial U}{\partial x}dx+\frac{\partial U}{\partial y}dy,$$

并把能写成这一形式的表达式 $p\,dx+q\,dy$ 称为正合微分(或全微分). 这样, 为要一个积分只依赖于两端点, 必须而且只须被积函数是一正合微分. 应当注意, 这里的 p, q 与 U 可以是实的, 也可以是复的. 函数 U 如果存在的话, 除了一个附加常数外是唯一确定的, 这是因为如果两函数具有相同的偏导数, 则它们只差一个常数.

在什么条件下 $f(z)dz=f(z)dx+if(z)dy$ 是一正合微分呢? 根据定义, 必须在 Ω 内存在一函数 $F(z)$, 使得

$$\frac{\partial F(z)}{\partial x}=f(z),$$

$$\frac{\partial F(z)}{\partial y}=if(z).$$

如果如此, 则 $F(z)$ 必满足 Cauchy-Riemann 方程

$$\frac{\partial F}{\partial x}=-i\frac{\partial F}{\partial y};$$

因为根据假设, $f(z)$ 是连续的 $\left(\text{否则, } \int_\gamma f\,dz \text{ 将没有定义}\right)$, 所以 $F(z)$ 是具有导数 $f(z)$ 的解析函数(见第 2 章 1.2 节).

连续函数 f 的积分 $\int_\gamma f\,dz$ 只依赖于 γ 的两端点的充要条件是: f 为 Ω 内一个解析函数的导数.

在这种情况下, $f(z)$ 本身必也是解析的, 其证明将在后面讨论.

作为上面结果的一个直接应用, 我们有: 对于所有的闭曲线 γ, 只要整数 $n\geqslant 0$, 则

$$\int_\gamma (z-a)^n dz=0. \tag{11}$$

因为 $(z-a)^n$ 是 $(z-a)^{n+1}/(n+1)$ 的导数, 而原函数是整个平面中的解析函数. 如 n 为负数, 但 $\neq -1$, 则对于所有不通过 a 的闭曲

线，也有同样的结果成立，因为在点 a 的余补域中，不定积分仍然是解析而单值的．如 $n=-1$，则(11)不一定成立．考察一个以 a 为中心的圆 C，设其方程为 $z=a+\rho e^{it}$，$0\leqslant t\leqslant 2\pi$．我们有

$$\int_C \frac{dz}{z-a}=\int_0^{2\pi} i\,dt=2\pi i.$$

这表明在环 $\rho_1<|z-a|<\rho_2$ 中，不可能为 $\log(z-a)$ 定义一单值分支．反之，如果闭曲线 γ 包含在不含点 a 的半平面中，则积分等于零，因为在这样一个半平面中，$\log(z-a)$ 的一单值解析分支是可以定义的。

习　题

1．计算

$$\int_\gamma x\,dz,$$

此处 γ 为由 0 至 $1+i$ 的有向线段．

2．试就圆的正向按下列两种方法计算

$$\int_{|z|=r} x\,dz,$$

第一种方法是应用一参数，第二种方法是在圆上取

$$x=\frac{1}{2}(z+\bar{z})=\frac{1}{2}\left(z+\frac{r^2}{z}\right).$$

3．试就圆的正向计算

$$\int_{|z|=2}\frac{dz}{z^2-1}.$$

4．计算

$$\int_{|z|=1}|z-1|\cdot|dz|.$$

5．假设 $f(z)$ 在闭曲线 γ 上解析（即 f 在包含 γ 的一个区域内是解析的)，证明

$$\int_\gamma \overline{f(z)}f'(z)dz$$

是纯虚数．($f'(z)$ 被认为是当然连续的．)

6．假设 $f(z)$ 在区域 Ω 内解析，并满足不等式 $|f(z)-1|<1$，证明对 Ω 中的任一闭曲线 γ，

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz=0.$$

($f'(z)$ 被认为是当然连续的．)

7. 若 $P(z)$ 是一多项式，C 表示圆 $|z-a|=R$，问 $\int_C P(z)d\bar{z}$ 的值为何？

答：$-2\pi iR^2P'(a)$.

8. 试描出一组圆周，使公式

$$\int_\gamma \log z\,dz=0$$

有意义并正确.

1.4 矩形的 Cauchy 定理

Cauchy 定理有好几种形式，但是与其说它们在分析内容上有所不同，倒不如说它们的差异在于拓扑方面. 因此，很自然地我们将从极少作拓扑考察的情形入手.

我们在这里专门研究一个由不等式 $a\leqslant x\leqslant b$, $c\leqslant y\leqslant d$ 所界定的矩形 R. 这一矩形的周界可以看作是一条简单闭曲线，由四根相接的直线段组成. 闭曲线的正向是这样选定的，那就是沿着这个方向，R 总位于各段有向线段的左方. 因此，四个顶点的顺序是 (a, c), (b, c), (b, d), (a, d). 我们把这一闭曲线称为 R 的**境界线**或**围线**，并记为 ∂R❶.

必须指出，这里的 R 是闭的点集，因此它不是一个域. 下面定理中讨论的是在矩形 R 上解析的函数. 读者应当理解，这样的一个函数按定义是确定在包含 R 的一个域内，并且在该域内解析.

下面就是 Cauchy 定理的一个初步形式：

定理 2 设函数 $f(z)$ 在 R 上解析，则

$$\int_{\partial R} f(z)dz=0. \tag{12}$$

这一定理的证明是以平分法为基础的. 引入记号

$$\eta(R)=\int_{\partial R} f(z)dz,$$

对于包含在所给矩形内的任一矩形也用这一记号. 如果将 R 分成四个全等的矩形 $R^{(1)}$, $R^{(2)}$, $R^{(3)}$, $R^{(4)}$，则因沿着公共边的积分

❶ 这是标准记法，我们要反复使用. 注意，根据早先的约定，∂R 也是作为一个点集 R 的边界（第 3 章 1.2 节）.

互相抵消，故有

$$\eta(R)=\eta(R^{(1)})+\eta(R^{(2)})+\eta(R^{(3)})+\eta(R^{(4)}). \tag{13}$$

应当注意，这一事实可以直接证明，不必一定要借助于几何的直觉. 虽然如此，但参看一下图 4-2 还是有助于理解的.

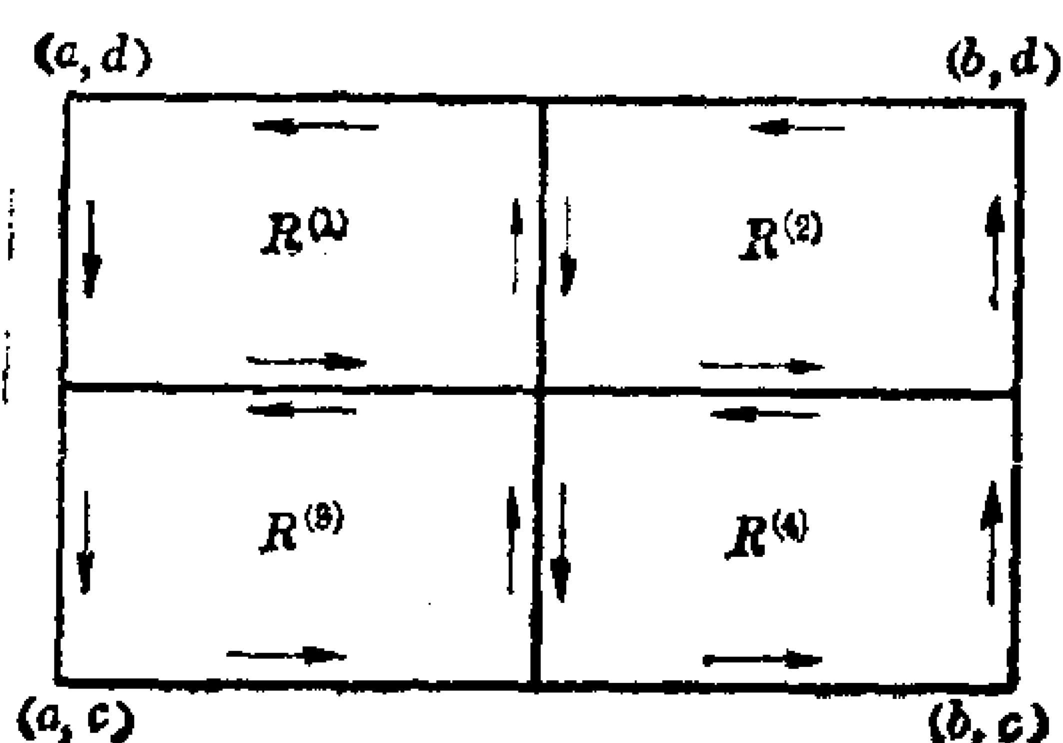


图 4-2　矩形的对分

从 (13) 可知，矩形 $R^{(k)}(k=1, 2, 3, 4)$ 之中至少有一个应满足条件

$$|\eta(R^{(k)})|\geqslant\frac{1}{4}|\eta(R)|.$$

我们把满足这一条件的矩形记为 R_1；如果有几个 $R^{(k)}$ 具有这一性质，那末可根据某一确定的规则来选定这个 R_1.

这一过程可无穷次地重复下去，于是得到矩形套序列

$$R\supset R_1\supset R_2\supset\cdots\supset R_n\supset\cdots,$$

具有如下的性质：

$$|\eta(R_n)|\geqslant\frac{1}{4}|\eta(R_{n-1})|,$$

因此

$$|\eta(R_n)|\geqslant 4^{-n}|\eta(R)|. \tag{14}$$

当 n 充分大时，R_n 将包含在一个预定的邻域 $|z-z^*|<\delta$ 之中，因此 R_n 将收敛于一点 $z^*\in R$. 首先，我们选定 δ 这样小，使得 $f(z)$ 在 $|z-z^*|<\delta$ 内有定义且解析. 其次，如给定了 $\varepsilon>0$，可选定 δ，使得对于 $|z-z^*|<\delta$，

$$\left|\frac{f(z)-f(z^*)}{z-z^*}-f'(z^*)\right|<\varepsilon$$

或

$$|f(z)-f(z^*)-(z-z^*)f'(z^*)|<\varepsilon|z-z^*|. \tag{15}$$

我们假设 δ 同时满足上面两个条件，并设 R_n 包含在 $|z-z^*|<\delta$ 之中.

现在来考察

$$\int_{\partial R_n} dz = 0, \quad \int_{\partial R_n} z\, dz = 0.$$

定理的这些特殊情形已在 1.1 节中证明．证明的时候是以 1 及 z 分别为 z 及 $z^2/2$ 的导数这一事实为根据的．

根据这两个方程，我们就有

$$\eta(R_n) = \int_{\partial R_n} [f(z) - f(z^*) - (z - z^*)f'(z^*)]dz,$$

而从(15)得到

$$|\eta(R_n)| \leqslant \varepsilon \int_{\partial R_n} |z - z^*| \cdot |dz|. \tag{16}$$

在最后的积分中 $|z - z^*|$ 充其量只能等于 R_n 的对角线 d_n．命 R_n 的周长为 L_n，则这一积分必 $\leqslant d_n L_n$．但如原来矩形 R 的对角线及周长为 d 及 L，则显然有 $d_n = 2^{-n}d$ 及 $L_n = 2^{-n}L$．因此，根据(16)就有

$$|\eta(R_n)| \leqslant 4^{-n} dL\varepsilon.$$

再与(14)式比较，就得

$$|\eta(R)| \leqslant dL\varepsilon.$$

由于 ε 是任意的，所以只能有 $\eta(R) = 0$，于是定理得证．

这一巧妙的证法是最简单的一个证法，本质上是由 E. Goursat 所提出，他发现要求 $f'(z)$ 为连续的这个经典假设是多余的．同时，这一证明方法要比经典方法为简单，因为它既不用重积分，也毋需在积分号下进行微分．

定理 2 中的假设条件可以大大减弱．在下面我们将证明一个非常有用的较强定理．

定理 3 从矩形 R 中去掉有穷个内点 ζ_j 而得点集 R'．设 $f(z)$ 在 R' 上解析．如果对于所有的 j，有

$$\lim_{z \to \zeta_j} (z - \zeta_j) f(z) = 0,$$

则

$$\int_{\partial R} f(z)dz = 0.$$

很明显，R 可以分成较小的矩形，使这些小矩形至多包含一个 ζ_j，因此，我们只须研究单独一个例外点 ζ 的情形就够了．

我们将 R 分成 9 个小矩形，如图 4-3 所示，除了中央的一个矩形 R_0 以外，对于其他的矩形，应用定理 2. 如果将每个矩形对应的方程(12)全部加起来，经过相消以后，可得

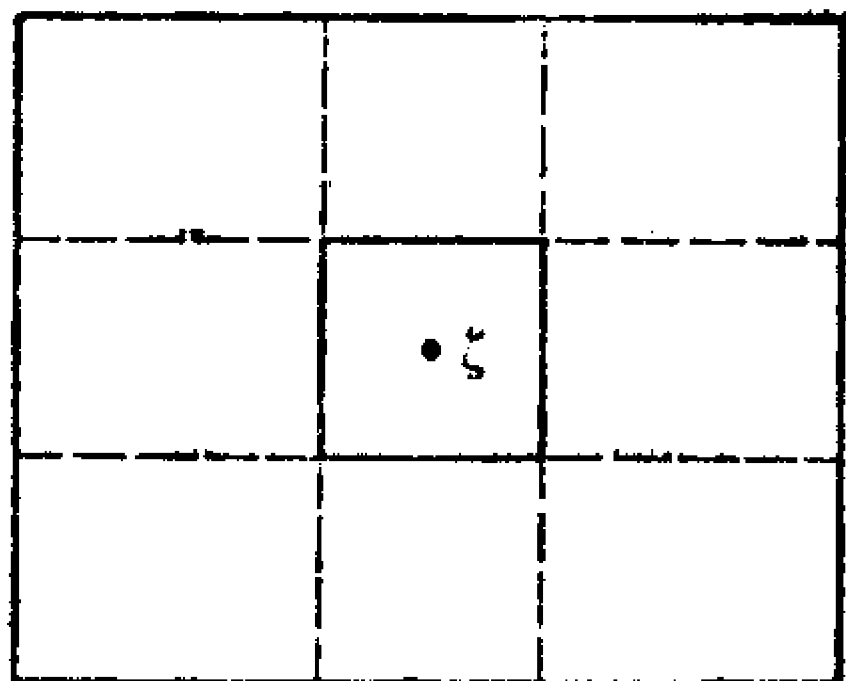


图 4-3

$$\int_{\partial R} f\,dz=\int_{\partial R_0} f\,dz. \tag{17}$$

如果 $\varepsilon>0$，我们可以把矩形 R_0 选择得这样小，使得在 ∂R_0 上有不等式

$$|f(z)|\leqslant\frac{\varepsilon}{|z-\zeta|}$$

成立. 因此，根据(17)可得

$$\left|\int_{\partial R} f\,dz\right|\leqslant\varepsilon\int_{\partial R_0}\frac{|dz|}{|z-\zeta|}.$$

我们可假设 R_0 是一个以 ζ 为中心的正方形，则通过初等计算表明

$$\int_{\partial R_0}\frac{|dz|}{|z-\zeta|}<8.$$

因此得到

$$\left|\int_{\partial R} f\,dz\right|<8\varepsilon,$$

由于 ε 是任意的，故定理得证.

如 $f(z)$ 在 R' 上解析而有界，则定理的假设条件当然是满足的.

1.5 圆盘中的 Cauchy 定理

一个解析函数沿着一条闭曲线的积分并不永远是等于零的. 实际上，如果 C 是以 a 为圆心的圆，则

$$\int_C\frac{dz}{z-a}=2\pi i.$$

设函数 $f(z)$ 在域 Ω 内解析，曲线 γ 限制在 Ω 内，为了确保积分等于零，我们必须对域 Ω 附加特殊的条件. 现在我们还不能列出这些条件，由于这一原因，我们的讨论必须限于最特殊的情形. 下面我们设 Ω 是一开圆盘 $|z-z_0|<\rho$，记为 Δ.

定理 4 设 $f(z)$ 在开圆盘 Δ 内解析，则对于 Δ 中每一条闭曲

线 γ，必有

$$\int_\gamma f(z)dz=0. \tag{18}$$

这一定理的证明是在定理 1 第二部分证明中所用的论断的重复．定义一个函数 $F(z)$ 如下：

$$F(z)=\int_\sigma f\,dz, \tag{19}$$

这里 σ 是由中心 $(x_0,\ y_0)$ 引至 $(x,\ y_0)$ 的水平线段及由 $(x,\ y_0)$ 引至 $(x,\ y)$ 的垂直线段组成；因此 $\partial F/\partial y=if(z)$．另一方面，根据定理 2，$\sigma$ 可以用一条由一段垂直线接以一段水平线所组成的路线来代替．这一选择定义出同一函数 $F(z)$，因而得到 $\partial F/\partial x=f(z)$．故知 $F(z)$ 在 Δ 内解析且具有导数 $f(z)$，而 $f(z)dz$ 则为一正合微分．

很明显，对于任一域，只要它包含点 z_0 及 z 蕴涵着包含以 z 及 z_0 为对顶点的矩形，同样的证法也适用．矩形、半平面及椭圆的内部都具有这种性质，因此定理 4 对于这些域也成立。不过，应用这一方法还不能达到完全的一般性．

在应用中，很重要的一点就是定理 4 的结论在定理 3 的较弱条件下也成立．我们现在把它作为另外一个定理．

定理 5 设 $f(z)$ 在域 Δ' 内解析，这里 Δ' 系由开圆盘 Δ 去掉有穷个点 ζ_j 后组成．如果对于所有的 j，$f(z)$ 满足条件

$$\lim_{z\to\zeta_j}(z-\zeta_j)f(z)=0,$$

则公式(18)对于 Δ' 内的任一闭曲线 γ 都成立．

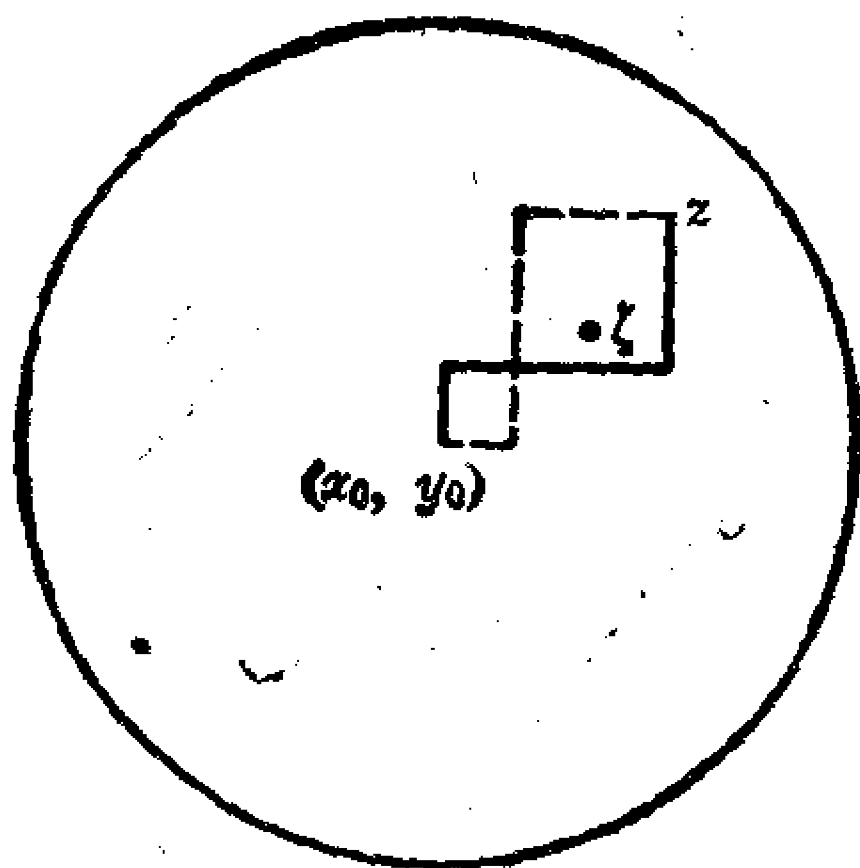


图 4-4

这一定理的证明方法要稍加修改，因为我们不能让 σ 通过例外的点．先设没有点 ζ_j 位于直线 $x=x_0$ 及 $y=y_0$ 上．于是令 σ 由图 4-4 中的三线段组成就可绕过例外的点．应用定理 3 就知道(19)中的 $F(z)$ 的值是不依赖于居中一线段的选择的；此外，最后一线段既可以是竖直的，也可以是水平的．象上面一样，我们得到结

论：$F(z)$是$f(z)$的一个不定积分，因而定理得证.

如果在直线 $x=x_0$ 和 $y=y_0$ 上有例外的点，读者容易相信，只要用四条线段代替三条线段，就可作出类似的证明.

2 Cauchy 积分公式

通过 Cauchy 定理的一个极简单的应用，我们就有可能将解析函数$f(z)$表示为一个线积分，其中变数 z 作为一参数．这一表示式称为 Cauchy 积分公式，有着很多重要的用途．总的说来，它可以帮助我们详细地去研究解析函数的各种局部性质.

2.1 一点关于闭曲线的指示数

在导出 Cauchy 公式之前，我们必须先介绍一个概念，它确切地指出一条闭曲线围绕不在曲线上一个固定点的次数．如曲线为逐段可微(我们这样假定并不失去一般性)，则可以下面的引理作为我们进行定义的依据.

引理 1 如果一条逐段可微的闭曲线 γ 并不通过点 a，则积分

$$\int_\gamma \frac{dz}{z-a}$$

的值是 $2\pi i$ 的一个倍数.

这一引理看来很平凡，因为我们可以写成

$$\int_\gamma \frac{dz}{z-a}=\int_\gamma d\log(z-a)$$

$$=\int_\gamma d\log|z-a|+i\int_\gamma d\arg(z-a).$$

当 z 描出一条闭曲线时，$\log|z-a|$ 回到它的最初值而 $\arg(z-a)$ 则增大或减小 2π 的一个倍数．这样似可肯定上面的引理，但再仔细想一下，就会发觉这理由是不充分的，除非 $\arg(z-a)$的值是唯一地定义的.

最简单的证明是计算的证法．设 γ 的方程为 $z=z(t)$，$\alpha\leqslant t\leqslant\beta$，考察函数

$$h(t)=\int_{\alpha}^{t}\frac{z'(t)}{z(t)-a}\,dt.$$

它在闭区间 $[\alpha,\ \beta]$ 上有定义而且连续，只要 $z'(t)$ 连续，则它具有导数

$$h'(t)=\frac{z'(t)}{z(t)-a}.$$

从这一式可知 $e^{-h(t)}(z(t)-a)$ 的导数除了可能在有穷个点上以外都将等于零，而这一函数是连续的，所以它必为一常数。因此有

$$e^{h(t)}=\frac{z(t)-a}{z(\alpha)-a}.$$

由于 $z(\beta)=z(\alpha)$，故得 $e^{h(\beta)}=1$，因此 $h(\beta)$ 必是 $2\pi i$ 的一个倍数。这就证明了引理。

现在我们可以把一点 a 关于曲线 γ 的指示数用下面的方程来定义，即

$$n(\gamma,\ a)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{dz}{z-a}.$$

用示意性的术语来说，指示数又称为曲线 γ 关于点 a 的环绕次数。

显然，$n(-\gamma,\ a)=-n(\gamma,\ a)$。

下面的性质是定理 4 的直接推论：

(i) 若 γ 位于一个圆的内部，则对于该圆外部的所有点 a，有 $n(\gamma,\ a)=0$。

把 γ 作为点集，那么它是一个闭集而且有界。它的余集是开集，可用余集的分集，即不相交的域的并集来表示。简言之，我们就说 γ 确定这些域。如果这些域是在扩充平面上，那么，它们之中将肯定只有一个包含无穷远点。因此，γ 确定了一个，而且只有一个无界的域。

(ii) 把 $n(\gamma,\ a)$ 看作是 a 的一个函数，则它在 γ 所确定的各个域内是一常数，而在无界域内则等于零。

由 γ 所确定的同一域中的任意两点都可用与 γ 不相交的折线连接起来。因此，如果 γ 与由 a 至 b 的线段不相交，则我们只要证

明 $n(\gamma, a)=n(\gamma, b)$ 就够了. 在这线段之外, 函数 $(z-a)/(z-b)$ 决不取负实数与零. 据此, $\log[(z-a)/(z-b)]$ 的主支在线段的余集中是解析的. 它的导数等于 $(z-a)^{-1}-(z-b)^{-1}$, 而如 γ 不与这一线段相交, 则必有

$$\int_\gamma\left(\frac{1}{z-a}-\frac{1}{z-b}\right)dz=0;$$

因此 $n(\gamma, a)=n(\gamma, b)$. 如果 $|a|$ 足够大, 使 γ 包含于一圆盘 $|z|<\rho<|a|$ 之中, 则根据(i)可知 $n(\gamma, a)=0$. 这就证明了在无界域内 $n(\gamma, a)=0$.

我们将会看到 $n(\gamma, a)=1$ 的情形显得特别重要, 因此需要为这一结论列出它的几何条件. 为了简单起见, 我们令 $a=0$.

引理 2 设 z_1, z_2 为不通过原点的闭曲线 γ 上的两点. 在曲线方向内由 z_1 至 z_2 的子弧记为 γ_1, 由 z_2 至 z_1 的子弧记为 γ_2. 设 z_1 位于下半平面, 而 z_2 位于上半平面, 如果 γ_1 不与负实轴相交, 而 γ_2 不与正实轴相交, 则

$$n(\gamma, 0)=1.$$

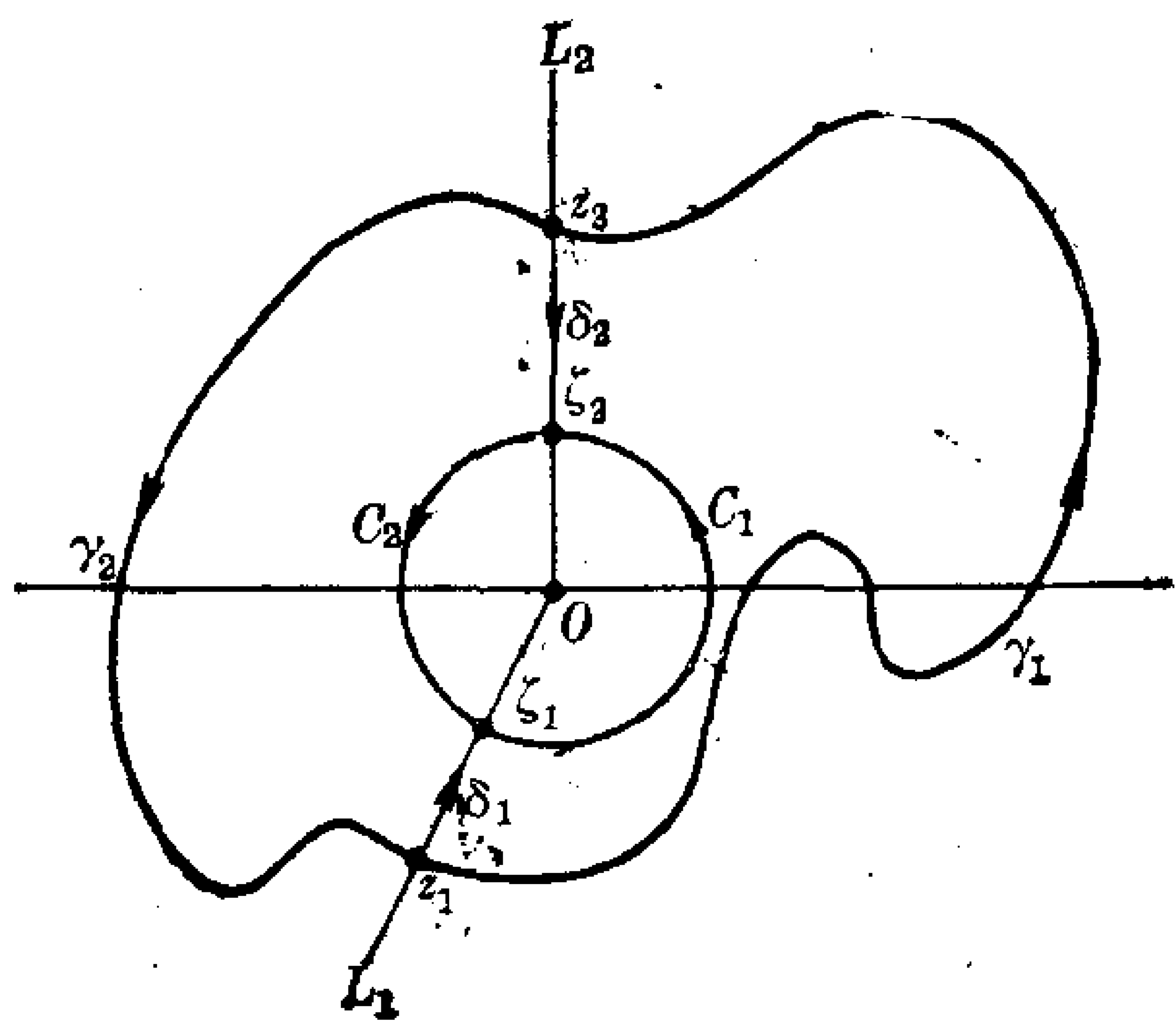


图 4-5

为了证明这一引理, 从原点引过 z_1 及 z_2 的半直线 L_1 及 L_2(图 4-5). 设 L_1, L_2 与以原点为心的圆 C 分别交于点 ζ_1, ζ_2. 设 C 取正方向, 并设由 ζ_1 至 ζ_2 的弧段 C_1 不与负实轴相交, 而由 ζ_2 至 ζ_1 的弧段 C_2 不与正实轴相交. 把 z_1 至 ζ_1 及 z_2 至 ζ_2 的有向线段分别记为 δ_1 及 δ_2. 引进闭曲线 $\sigma_1=\gamma_1+\delta_2-C_1-\delta_1$, $\sigma_2=\gamma_2+\delta_1-C_2-\delta_2$, 则彼此相消后可得 $n(\gamma, 0)=n(C, 0)+n(\sigma_1, 0)+n(\sigma_2, 0)$. 但 σ_1 并不与负实轴相交, 因此原点应属于 σ_1 所确定的无界域, 于是得 $n(\sigma_1, 0)=0$. 同理可得 $n(\sigma_2, 0)=0$, 从而得到

$$n(\gamma, 0)=n(C, 0)=1.$$

习　　题

这些不是常规的习题，是用以说明环绕次数的拓扑用途的。

1．把 γ 分成有穷多个子弧，使在每一子弧上存在 $\arg(z-a)$ 的一个单值分支，以此来给出引理 1 的另一证明．要特别注意：为证明这样一个分划的存在性而需用的紧致性论据．

2．对于不过点 a 的任何连续闭曲线 γ，不论它是否逐段可微，总可能定义 $n(\gamma, a)$．为此，将 γ 分成子弧 $\gamma_1, \cdots, \gamma_n$，每段子弧都包含在不含 a 的一个圆盘中．设 σ_k 是从 γ_k 的起点到终点的有向线段，并令 $\sigma=\sigma_1+\cdots+\sigma_n$．定义 $n(\gamma, a)$ 为 $n(\sigma, a)$ 的值．

为验证这定义，证明：

(a) 结果不依赖于分法；

(b) 如果 γ 是逐段可微的，则新的定义等价于老的定义；

(c) 正文中的性质(i)和(ii)继续有效．

3．Jordan 曲线定理断言：平面中的每一条 Jordan 曲线恰好确定两个区域．环绕次数概念使定理的一部分的证明加快，就是说：Jordan 曲线 γ 的补至少有两个分集．如果存在一点 a，使 $n(\gamma, a)\neq 0$，情况就是这样．

可假定在 γ 上 $\mathrm{Re}\,z>0$，并设有点 z_1、$z_2\in\gamma$，适合 $\mathrm{Im}\,z_1<0$，$\mathrm{Im}\,z_2>0$．这些点可以取得使 γ 上没有其它的点位于 0 到 z_1 和 0 到 z_2 的线段上．设 γ_1 和 γ_2 是由 z_1 到 z_2 的 γ 的弧(包括端点)．

设 σ_1 是由从 0 到 z_1 的线段接上 γ_1 和从 z_2 到 0 的线段组成的闭曲线，并设 σ_2 的构造与 σ_1 相同，但 γ_1 换成 γ_2，于是 $\sigma_1-\sigma_2=\gamma$ 或 $-\gamma$．

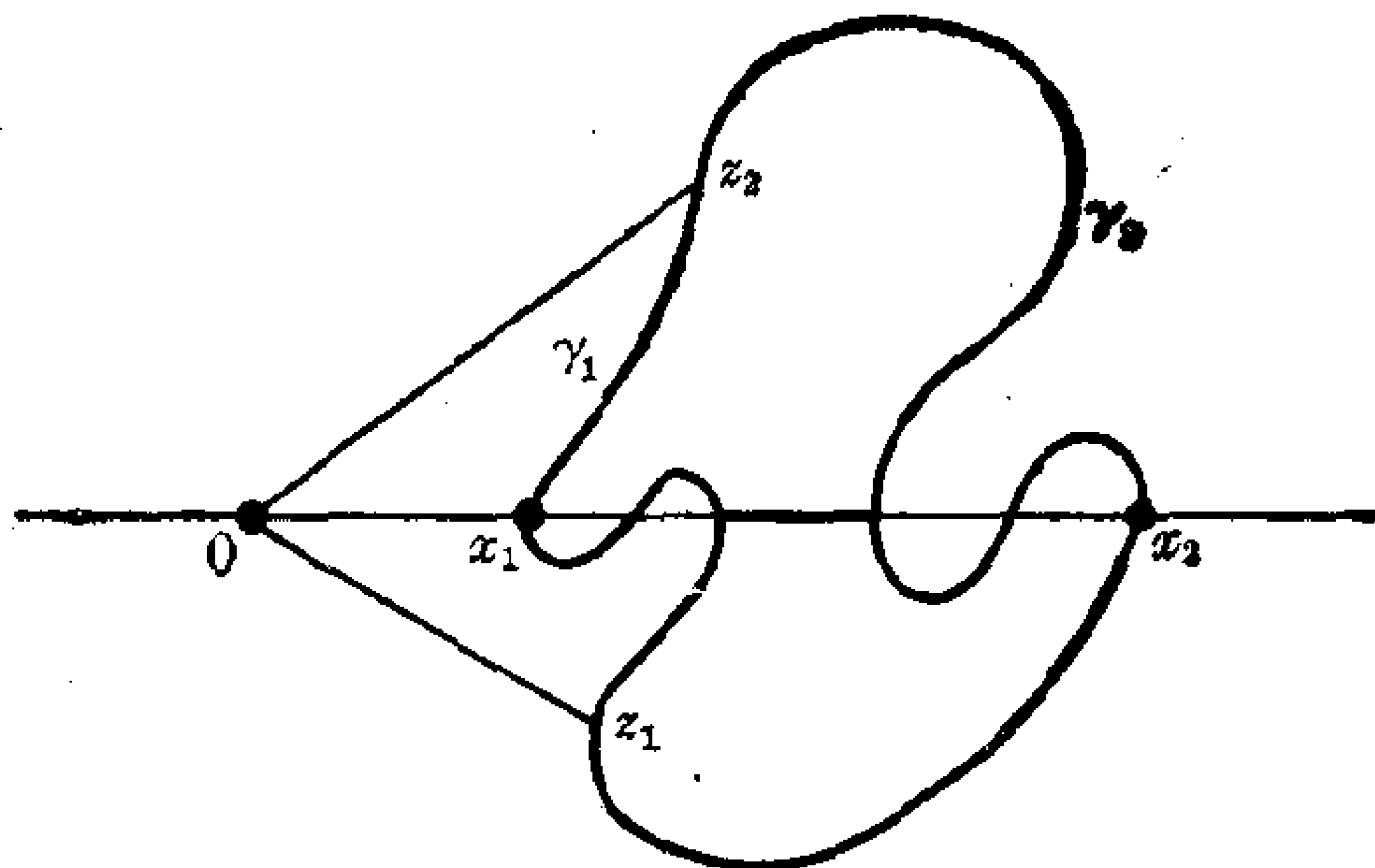


图 4–6　Jordan 曲线定理部分

正实轴和 γ_1 与 γ_2 都相交(为什么?)．选取这样的记号，使右边最远的交点 x_2 是与 γ_2 相交的点(图 4–6)．

证明：

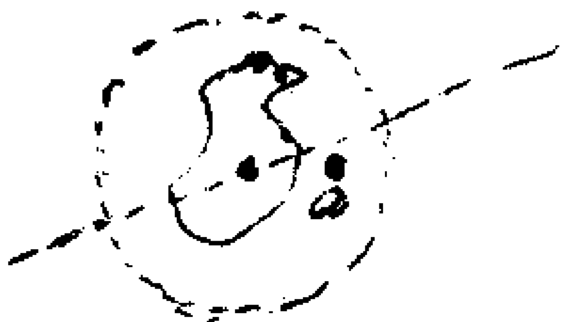
(a) $n(\sigma_1, x_2)=0$，因此，对于 $z\in\gamma_2$，有 $n(\sigma_1, z)=0$；

(b) 对于小的 $x>0$，$n(\sigma_1, x)=n(\sigma_2, x)=1$(引理 2)；

(c) 正实轴与 γ 的第一个交点 x_1 位于 γ_1 上；

(d) $n(\sigma_2, x)=1$，因此，对于 $z\in\gamma_1$，有 $n(\sigma_2, z)=1$；

(e) 正实轴有一段，其一端在 γ_1 上，另一端在 γ_2 上，别无其它的点在 γ 上．这两端点之间的点 x 满足 $n(\gamma, x)=1$ 或 -1．



2.2 积分公式

设 $f(z)$ 在一开圆盘 Δ 内解析．考察 Δ 中的一条闭曲线 γ 及不在 γ 上的一点 $a\in\Delta$．把 Cauchy 定理应用于函数

$$F(z)=\frac{f(z)-f(a)}{z-a}.$$

这一函数对于 $z\neq a$ 是解析的．如果 $z=a$，则没有定义，但它满足条件

$$\lim_{z\to a}F(z)(z-a)=\lim_{z\to a}[f(z)-f(a)]=0,$$

这是定理 5 的条件．因此

$$\int_\gamma\frac{f(z)-f(a)}{z-a}\,dz=0.$$

这一方程可写成下面的形式

$$\int_\gamma\frac{f(z)dz}{z-a}=f(a)\int_\gamma\frac{dz}{z-a},$$

但右边的积分根据定义应等于 $2\pi i\cdot n(\gamma, a)$，因此证明了下面的定理：

定理 6 设 $f(z)$ 在开圆盘 Δ 内解析，并设 γ 是 Δ 中的一条闭曲线．那末对于不在 γ 上的任一点 a，必有

$$n(\gamma, a)\cdot f(a)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(z)}{z-a}dz, \tag{20}$$

这里 $n(\gamma, a)$ 是点 a 关于 γ 的指示数．

在上面的叙述中，我们不要求 a 是 Δ 中的一点，这主要是为了便于对 a 不属于 Δ 的情形解释公式 (20)．事实上，当 $a\notin\Delta$ 时，$n(\gamma, a)$ 及右边的积分都等于零，因此，不论 $f(a)$ 取怎样的值，公式(20)都正确．

很明显，对于任一可以应用定理 5 的域 Ω，定理 6 均成立．也可允许有应予除去的点 ζ_j，只要它们都不与 a 相重．

这一定理最普通的应用是用于 $n(\gamma, a)=1$ 的情形，这时我们有

$$f(a)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(z)dz}{z-a}, \tag{21}$$

这一式常称为表示公式．事实上，只要 $f(z)$ 在 γ 上的值为已知，且如已知 $f(z)$ 在 Δ 内解析，则 $f(a)$ 的值就可以算出．在(21)式中，只要 a 关于 γ 的指示数始终保持等于 1，那么，我们也可以令 a 取不同的各种值．这样，我们就可以把 a 当作是一个变数，为了方便起见，可将记法稍加改变而把(21)式写成

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}. \tag{22}$$

这一公式通常称为 Cauchy 积分公式．应当记住，这一公式仅当 $n(\gamma, z)=1$ 时正确，而且我们只对 $f(z)$ 在圆盘内为解析时作了证明．

习　　题

1．计算

$$\int_{|z|=1}\frac{e^z}{z}dz.$$

2．将被积函数分解为部分分式，计算

$$\int_{|z|=2}\frac{dz}{z^2+1}.$$

3．计算

$$\int_{|z|=\rho}\frac{|dz|}{|z-a|^2},$$

条件是 $|a|\neq\rho$．

[提示：应用方程 $z\bar{z}=\rho^2$ 及

$$|dz|=-i\rho\frac{dz}{z}.]$$

2.3　高阶导数

表示式(22)给我们提供了一个研究解析函数局部性质的理想工具．特别是，我们从此可以证明一个解析函数具有各阶导数，而各阶导函数也必都是解析的．

现在来考察在一任意域 Ω 内解析的函数 $f(z)$．对于一点

$a\in\Omega$, 我们确定一个包含于 Ω 中的 δ 邻域 Δ, 并在 Δ 内确定一个以 a 为中心的圆 C. 对 Δ 内的 $f(z)$ 可以应用定理 6. 由于 $n(C, a)=1$, 故知对于 C 内部的所有点 z, 都有 $n(C, z)=1$. 对于这些 z, 根据(22)式有

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}.$$

只要这一积分可以在积分号下进行微分，则

$$f'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z)^2}, \tag{23}$$

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z)^{n+1}}. \tag{24}$$

如果这些微分公式能够得到证明，那就证明了 C 内部各点上各阶导数的存在. 由于 Ω 中的每一点都位于某一圆 C 的内部, 故在整个域 Ω 中各阶导数的存在得证. 同时我们也将得出一个便于求导数的表示公式.

这里的证明或者可参照实数情形中的相应定理来进行，或者证明一个关于线积分的一般定理，这一线积分的被积函数在分析意义上依赖于一个参数. 实际上, 就目前需要来说, 我们只要证明下面一个引理就够了:

引理 3 设 $\varphi(\zeta)$ 是弧 γ 上的一个连续函数. 则函数

$$F_n(z)=\int_\gamma\frac{\varphi(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z)^n}$$

在 γ 所确定的任一域内都解析, 且其导数为

$$F'_n(z)=nF_{n+1}(z).$$

先证 $F_1(z)$ 是连续的. 设 z_0 为不在 γ 上的一点, 选取邻域 $|z-z_0|<\delta$, 使之不与 γ 相交. 将 z 限制于较小的邻域 $|z-z_0|<\delta/2$ 之中, 则对所有的 $\zeta\in\gamma$, 就得 $|\zeta-z|>\delta/2$. 从

$$F_1(z)-F_1(z_0)=(z-z_0)\int_\gamma\frac{\varphi(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z)(\zeta-z_0)}$$

立即可得

$$|F_1(z)-F_1(z_0)|<|z-z_0|\cdot\frac{2}{\delta^2}\int_\gamma|\varphi||d\zeta|,$$

这一不等式证明了 $F_1(z)$ 在 z_0 是连续的.

将引理的这一部分应用于函数 $\varphi(\zeta)/(\zeta-z_0)$，则知当 $z\to z_0$ 时，差商

$$\frac{F_1(z)-F_1(z_0)}{z-z_0}=\int_\gamma \frac{\varphi(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z)(\zeta-z_0)}$$

将趋于极限 $F_2(z_0)$. 这就证明了 $F_1'(z)=F_2(z)$.

一般的情形可用归纳法来证明. 假设已经证明

$$F_{n-1}'(z)=(n-1)F_n(z).$$

从恒等式

$$F_n(z)-F_n(z_0)=\left[\int_\gamma \frac{\varphi\, d\zeta}{(\zeta-z)^{n-1}(\zeta-z_0)}-\int_\gamma \frac{\varphi\, d\zeta}{(\zeta-z_0)^n}\right]$$

$$+(z-z_0)\int_\gamma \frac{\varphi\, d\zeta}{(\zeta-z)^n(\zeta-z_0)}$$

可知 $F_n(z)$ 是连续的. 事实上，根据归纳假设，应用于 $\varphi(\zeta)/(\zeta-z_0)$，上式右边第一项当 $z\to z_0$ 时将趋于零，而在第二项中，$z-z_0$ 的因子在 z_0 的一个邻域中有界. 现在如以 $z-z_0$ 除恒等式两边，并令 $z\to z_0$，则第一项中的商将趋于一导数，根据归纳假设，它应等于 $(n-1)F_{n+1}(z_0)$. 第二项中余下的因子是连续的，根据上面已经证明过的关系可知它应具有极限 $F_{n+1}(z_0)$. 这就证明了 $F_n'(z_0)$ 的存在，且等于 $nF_{n+1}(z_0)$.

很明显，引理 **3** 就正是用严格方法导出公式(23)及(24)的依据. 这样，我们就证明了任一解析函数具有各阶导数，它们都是解析的，且可用公式(24)来表示.

在这一结果的许多推论中，我们可以指出两个古典定理. 第一个就是所谓 Morera 定理，可叙述如下：

设 $f(z)$ 在域 Ω 内定义且连续. 如果对于 Ω 中的所有闭曲线 γ，有 $\int_\gamma f\,dz=0$，则 $f(z)$ 在 Ω 内解析.

正象我们在 1.3 节中所已经说明的，从假设条件可以推知 $f(z)$ 是一个解析函数 $F(z)$ 的导数. 因此知 $f(z)$ 本身是解析的.

第二个古典定理称为 Liouville 定理：

在整个平面中有界的解析函数必是一常数.

为了证明这一定理，我们应用一个从(24)式导出的简单估计式．设C的半径为r，并设在C上有$|f(\zeta)|\leqslant M$．应用(24)式，取$z=a$，则得

$$|f^{(n)}(a)|\leqslant Mn!r^{-n}. \tag{25}$$

对于 Liouville 定理，我们只须研究$n=1$的情形．定理的假设条件意味着在所有的圆上都有$|f(\zeta)|\leqslant M$．因此可令$r\to\infty$，于是对于所有的a，从(25)得$f'(a)=0$．由此可知函数是一常数．

Liouville 定理引出了代数基本定理的证明．设$P(z)$为次数>0的多项式．如$P(z)$恒不等于零，则$1/P(z)$将是整个平面中的解析函数．当$z\to\infty$时，$P(z)\to\infty$，因此$1/P(z)\to 0$．这就表示函数是有界的(绝对值在 Riemann 球面上连续，因此具有一有限的极大值)，根据 Liouville 定理，$1/P(z)$应为常数．但情形并不如此，因此方程$P(z)=0$必有一个根．

不等式(25)称为 Cauchy 估值．重要的是，它表明一个解析函数的逐次导数不能是任意的；必有一个M及一个r存在，使(25)成立．为了很好地应用这一不等式，适当地选择r就很重要，其目的就是使函数$M(r)r^{-n}$尽量的小，此处$M(r)$是$|f|$在$|\zeta-a|=r$上的极大值．

习　题

1. 计算：

$$\int_{|z|=1} e^z z^{-n}\,dz;\quad \int_{|z|=2} z^n(1-z)^m\,dz;\quad \int_{|z|=\rho} |z-a|^{-4}|dz|\ (|a|\neq\rho).$$

2. 求证，在整个平面中解析的函数如果对于某些n及所有充分大的$|z|$，能满足不等式$|f(z)|<|z|^n$，则必为一多项式．

3. 设$f(z)$是解析函数，对于$|z|\leqslant R$，有$|f(z)|\leqslant M$，试求$|f^{(n)}(z)|$在$|z|\leqslant\rho<R$中的上界．

4. 设$f(z)$当$|z|<1$时解析，且$|f(z)|\leqslant 1/(1-|z|)$，试由 Cauchy 不等式求$|f^{(n)}(0)|$的最优估值．

5. 求证一个解析函数在一点上的逐次导数决不能满足不等式$|f^{(n)}(z)|>n!n^n$．试作出一个同类的较明确的定理．

6. 引理 3 的一个更为一般的形式如下：设函数 $\varphi(z, t)$在 z 位于区域 Ω 中而 $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ 时，作为两个变量的函数是连续的．再设 $\varphi(z, t)$对任何固定的 t，作为 $z\in\Omega$ 的函数是解析的，那么

$$F(z)=\int_{\alpha}^{\beta}\varphi(z, t)dt$$

关于 z 是解析的，且

$$F'(z)=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{\partial\varphi(z, t)}{\partial z}dt. \tag{26}$$

要证明上式，可将 $\varphi(z, t)$表成 Cauchy 积分

$$\varphi(z, t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C}\frac{\varphi(\zeta, t)}{\zeta-z}d\zeta.$$

经过计算，得到

$$F(z)=\int_{C}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha}^{\beta}\varphi(\zeta, t)dt\right)\frac{d\zeta}{\zeta-z},$$

并用引理 3 证明(26)．

3 解析函数的局部性质

上面我们已经证明：解析函数具有各阶导数．在本节中，我们将详细研究其局部性质，包括解析函数的各种孤立奇点的分类．

3.1 可去奇点，Taylor 定理

在定理 3 中，我们提出了一个较弱的条件，用以代替有穷个点上的解析性，而不影响最后的结果．在定理 5 中，我们又证明，在这些较弱的条件下，圆盘中的 Cauchy 定理仍保持正确．这就是我们导出 Cauchy 积分公式的主要根据，因为我们应用 Cauchy 定理于函数$(f(z)-f(a))/(z-a)$．

最后，我们曾指出，如果有有穷个例外点存在，都满足定理 3 的基本条件，则只要这样的点没有一个与 a 重合，Cauchy 积分公式仍然有效．这一说明较之它表现在表面上的更为重要．事实上，Cauchy 公式使我们能用依赖于 z 的一个积分来表示$f(z)$，在例外点亦如在其他地方一样都有此特性．因此，例外点只是些缺乏了解的点，而不是本质上有何不同的点．具有这一特性的点称为可

去奇点．现在我们来证明下面的定理：

定理 7 设 Ω' 是一个由区域 Ω 弃去一点 a 而成的区域，并设 $f(z)$ 是 Ω' 内的解析函数．则要 Ω 内存在一个与 Ω' 内的 $f(z)$ 相重合的解析函数，其充要条件为 $\lim\limits_{z\to a}(z-a)f(z)=0$．延拓的函数是唯一地确定的．

这一定理的必要性和唯一性都是很明显的，因为延拓的函数必须在 a 上连续．为了证明条件的充分性，可以 a 为心作一圆 C，使 C 及其内部都包含在 Ω 内．这时 Cauchy 公式是适用的，对于 C 内部的所有 $z\neq a$，可有

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}.$$

但右边的积分表示一个在 C 内部处处解析的 z 的函数．因此，一个函数，当 $z\neq a$ 时它等于 $f(z)$ 而当 $z=a$ 时，它的值为

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-a},\tag{27}$$

这一函数必在 Ω 内解析．我们自然可以 $f(z)$ 表示延拓的函数，而以 $f(a)$ 表示值 (27)．

我们将这一结果应用于证明 Cauchy 公式时所用的函数

$$F(z)=\frac{f(z)-f(a)}{z-a}.$$

这一函数在 $z=a$ 时没有定义，但它满足条件 $\lim\limits_{z\to a}(z-a)F(z)=0$．当 $z\to a$ 时，$F(z)$ 的极限是 $f'(a)$．因此，存在一个解析函数，它在 $z\neq a$ 时等于 $F(z)$，而在 $z=a$ 时等于 $f'(a)$．以 $f_1(z)$ 表示这一函数．重复这一过程，可得一解析函数 $f_2(z)$，当 $z\neq a$ 时，它等于 $(f_1(z)-f_1(a))/(z-a)$，而当 $z=a$ 时它等于 $f_1'(a)$，如此等等．

用以定义 $f_n(z)$ 的递推关系可写成如下形式：

$$f(z)=f(a)+(z-a)f_1(z),$$
$$f_1(z)=f_1(a)+(z-a)f_2(z),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f_{n-1}(z)=f_{n-1}(a)+(z-a)f_n(z),$$

这些方程对 $z=a$ 也正确，从这些方程可得

$$f(z)=f(a)+(z-a)f_1(a)+(z-a)^2f_2(a)+\cdots$$
$$+(z-a)^{n-1}f_{n-1}(a)+(z-a)^nf_n(z).$$

微分 n 次，并令 $z=a$，得

$$f^{(n)}(a)=n!f_n(a).$$

这确定出系数 $f_n(a)$，因此得如下形式的 Taylor 定理：

定理 8 设 $f(z)$ 在包含 a 的区域 Ω 内解析，则有

$$f(z)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(z-a)+\frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2+\cdots$$
$$+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(z-a)^{n-1}+f_n(z)(z-a)^n. \tag{28}$$

此处 $f_n(z)$ 在 Ω 内是解析的.

这一有限的展开式必须和后面即将讨论的无穷 Taylor 级数很好区别. 不过，对于研究 $f(z)$ 的局部性质来说，最有用的还是有限展开式(28). 它之所以有用，在于 $f_n(z)$ 有一个表成线积分的简单的显式表示.

应用上面的同一个圆 C，首先我们有

$$f_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f_n(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}.$$

而后用从(28)式所得的表达式代 $f_n(\zeta)$. 包含 $f(\zeta)$ 的只有一项，其余的项，除了常数因子外，都有如下的形式：

$$F_\nu(a)=\int_C\frac{d\zeta}{(\zeta-a)^\nu(\zeta-z)},\ \nu\geq1.$$

但对于 C 内部的所有 a，恒等地有

$$F_1(a)=\frac{1}{z-a}\int_C\left(\frac{1}{\zeta-z}-\frac{1}{\zeta-a}\right)d\zeta=0.$$

根据引理 3，有 $F_{\nu+1}(a)=F_1^{(\nu)}(a)/\nu!$，因此，对于所有的 $\nu\geq1$，有 $F_\nu(a)=0$. 故 $f_n(z)$ 的表达式化为

$$f_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-a)^n(\zeta-z)}. \tag{29}$$

这一表示式在 C 内部是正确的.

3.2 零点和极点

如果$f(a)$及所有的导数$f^{(\nu)}(a)$都等于零，则根据(28)，对于任一个n,

$$f(z)=f_n(z)(z-a)^n. \tag{30}$$

$f_n(z)$的估值可用(29)式求得．具有周界C的圆盘应包含于域Ω中，在这个域Ω内，函数$f(z)$有定义且解析．绝对值$|f(z)|$在C上具有一个极大M；如令C的半径为R，则对于$|z-a|<R$，有

$$|f_n(z)|\leqslant\frac{M}{R^{n-1}(R-|z-a|)}.$$

因此，根据(30)式，

$$|f(z)|\leqslant\left(\frac{|z-a|}{R}\right)^n\cdot\frac{MR}{R-|z-a|}.$$

但在$n\to\infty$时，$(|z-a|/R)^n\to0$，因为$|z-a|<R$．因此，在C的内部，$f(z)=0$.

现在我们来证明在整个Ω内$f(z)$恒等于零．设E_1为一集，在其上$f(z)$及其所有导数都等于零，并设E_2为另一集，在其上函数或其导数之一异于零．则根据上面的理由可知E_1是开集，而由于函数及其所有导数都是连续的，故知E_2也是开集．因此，E_1或E_2必有一为空集．如果E_2为空集，则函数应恒等于零．如果E_1是空集，则$f(z)$及其所有导数不能同时等于零．

设$f(z)$不恒等于零．那么，如果$f(a)=0$，则存在第一个不等于零的导数$f^{(h)}(a)$．此时，我们称a为一h阶零点，根据上面的证明，可知无穷阶零点是不存在的．在这一方面，解析函数与多项式具有同样的局部性质，正象在多项式的情形一样，我们可写$f(z)=(z-a)^hf_h(z)$，此处$f_h(z)$是解析的，且$f_h(a)\neq0$.

在同样情形中，由于$f_h(z)$是连续的，故知在a的一个邻域中，$f_h(z)\neq0$，而$z=a$就是$f(z)$在这一邻域中的唯一零点．换句话说，凡是一个不恒等于零的解析函数的诸零点都是孤立的．这一性质也可叙述为下面的唯一性定理：设$f(z)$及$g(z)$是Ω内的两个解析

函数，如果有一个点集，它有一聚点在Ω中，在这个集上$f(z)=g(z)$，则$f(z)$恒等于$g(z)$．这一定理可用差$f(z)-g(z)$来证明．

这一定理的特例中值得一提者是：如果$f(z)$在Ω的一个子域中恒等于零，则它在Ω内恒等于零，同样，如果$f(z)$在一段不退化为一点的弧上恒等于零，则在整个域内恒等于零．也可以这样说：一个解析函数可用它在任一集上的值唯一地确定，只要这一集有一聚点包含在解析域中．不过，这并不意味着我们已经知道了计算函数值的任何方法．

现在我们来考察一个在a的邻域中解析的函数$f(z)$，这一函数可能在a本身上并不解析，也就是说，$f(z)$将在区域$0<|z-a|<\delta$内解析．点a称为$f(z)$的孤立奇点．上面我们已经讨论过可去奇点的情形．据此，我们可以定义$f(a)$使得$f(z)$在圆盘$|z-a|<\delta$内成为一个解析函数，因此这里就不须作进一步的研究[1]．

如果$\lim\limits_{z\to a}f(z)=\infty$，则点$a$称为$f(z)$的极点，而令$f(a)=\infty$．存在一个$\delta'\leqslant\delta$，使得当$0<|z-a|<\delta'$时，$f(z)\neq 0$．在这一区域中，函数$g(z)=1/f(z)$有定义且解析．但$g(z)$在$a$处的奇点是可去的，而且$g(z)$具有一个解析延拓，以$g(a)=0$．由于$g(z)$并不恒等于零，$a$处的零点具有有穷的阶数，可命$g(z)=(z-a)^h g_h(z)$，$g_h(a)\neq 0$．数$h$称为极点的阶数，$f(z)$的表示式为

$$f(z)=(z-a)^{-h}f_h(z),$$

其中$f_h(z)=1/g_h(z)$在a的一个邻域中解析且不等于零．这样，就可以看出一个极点的本质恰与有理函数情形中的一样．

一个在域Ω内除了极点以外到处解析的函数$f(z)$称为Ω内的半纯函数．更精确地说，对于每一个$a\in\Omega$，在Ω内必存在一个邻域$|z-a|<\delta$，使得函数$f(z)$或者在整个邻域中解析，或者在区域$0<|z-a|<\delta$中解析，而孤立奇点是一个极点．一个半纯函数的极点，根据定义是孤立的．在Ω内解析的两函数之商

[1] 如a为一可去奇点，则$f(z)$常称为在a处正则；这一词有时用作解析的同义语．

$f(z)/g(z)$，只要 $g(z)$ 不恒等于零，则是 Ω 内的半纯函数．它可能有的极点都是 $g(z)$ 的零点，但 $f(z)$ 及 $g(z)$ 的公共零点也可以是一个可去奇点．若有这一情形存在，则商的值必须用连续性确定．更一般地说，两个半纯函数的和、积及商都是半纯的．除非把常数 ∞ 也当作是一个半纯函数，否则分母恒等于零的情形应除外．

为了更详细地讨论孤立奇点，我们来考察两种情形：(1) $\lim\limits_{z\to a}|z-a|^{\alpha}|f(z)|=0$；(2) $\lim\limits_{z\to a}|z-a|^{\alpha}|f(z)|=\infty$，此处 α 是一实数．如果对于某一个 α，条件(1)成立，则对所有更大的 α，因而对某一整数 m，(1)也成立．因此，$(z-a)^m f(z)$ 具有一可去奇点，而当 $z=a$ 时它等于零．这里又有两种情形，或者是 $f(z)$ 恒等于零，此时(1)对所有的 α 都成立，或者是 $(z-a)^m f(z)$ 具有一有限阶数 k 的零点．在后一情形下，可知(1)对所有 $\alpha>h=m-k$ 成立，而(2)对所有 $\alpha<h$ 成立．现在设(2)对某一 α 成立；则对所有更小的 α，因而对某一整数 n，条件(2)成立．函数 $(z-a)^n f(z)$ 具有一有限阶数 l 的极点，如令 $h=n+l$，则仍然有(1)对所有 $\alpha>h$ 成立而(2)对所有 $\alpha<h$ 成立．这一讨论说明有三种可能情形：(i)条件(1)对所有的 α 成立，而 $f(z)$ 恒等于零；(ii)存在一整数 h，使条件(1)对所有 $\alpha>h$ 成立，而条件(2)对所有 $\alpha<h$ 成立；(iii)无论条件(1)或(2)，对任一 α 都不成立．

第(i)种情形是没有意义的．在第(ii)种情形中，我们可把 h 称为 $f(z)$ 在 a 处的代数阶数．如 a 为一极点，则 h 是正的；如 a 为一零点，则 h 是负的；如 $f(z)$ 在 a 处解析但 $\neq 0$，则 $h=0$．值得注意的是阶数永远是一整数；没有一个单值解析函数能象 $|z-a|$ 的非整数次乘幂那样趋向于 0 或 ∞．

在 h 阶极点的情形，对解析函数 $(z-a)^h f(z)$ 应用定理 8，得如下展开式

$$(z-a)^h f(z)=B_h+B_{h-1}(z-a)+\cdots$$
$$+B_1(z-a)^{h-1}+\varphi(z)(z-a)^h,$$

其中函数 $\varphi(z)$ 在 $z=a$ 处解析．如 $z\neq a$，则可用 $(z-a)^h$ 遍除上

式，得

$$f(z)=B_h(z-a)^{-h}+B_{h-1}(z-a)^{-h+1}+\cdots$$
$$+B_1(z-a)^{-1}+\varphi(z).$$

上面的展开式中，在 $\varphi(z)$ 前面的部分称为 $f(z)$ 在 $z=a$ 处的奇部. 由此可知，一个极点不仅有阶数，而且还有定义妥贴的奇部. 具有相同奇部的两个函数之差在 a 处是解析函数.

在(iii)的情形，点 a 称为本性孤立奇点. 在一个本性奇点的邻域中，$f(z)$ 一方面是无界的，但同时又是任意地逼近于零的. 下面我们来证明 Weierstrass 的一个经典定理，借以说明函数在本性奇点邻域中复杂性态的特征.

定理 9 一个解析函数在本性奇点的每一邻域中都将任意地逼近于任一复数值.

如果这一断言不正确，那末一定可以找到一个复数 A 及一个 $\delta>0$，在 a 的一个邻域($z=a$ 除外)中满足条件 $|f(z)-A|>\delta$. 于是对于任一 $\alpha<0$，有 $\lim_{z\to a}|z-a|^{\alpha}|f(z)-A|=\infty$. 这样，$a$ 就不能是 $f(z)-A$ 的本性奇点. 因此，必存在一个 β，使

$$\lim_{z\to a}|z-a|^{\beta}|f(z)-A|=0,$$

而且可以选取 β 是一正数. 在这一情形，由于

$$\lim_{z\to a}|z-a|^{\beta}|A|=0,$$

故知

$$\lim_{z\to a}|z-a|^{\beta}|f(z)|=0,$$

而 a 就不能是 $f(z)$ 的本性奇点. 这与假设矛盾，因此定理得证.

孤立奇点的概念也适用于在 ∞ 的邻域 $|z|>R$ 中解析的函数. 由于 $f(\infty)$ 是没有定义的，我们把 ∞ 看作是一孤立奇点，根据约定，如同 $g(z)=f(1/z)$ 在 $z=0$ 上的奇性一样，它具有可去奇点、极点或本性奇点的同样特性. 如奇点是非本性的，则 $f(z)$ 具有一代数阶 h，使 $\lim_{z\to\infty}z^{-h}f(z)$ 既不等于零，也不等于 ∞，因此对于一极点，奇部应是 z 的多项式. 如 ∞ 为一本性奇点，则在 ∞ 的每一邻域中，函数具有定理 9 所说的性质.

习　题

1. 若函数 $f(z)$ 及 $g(z)$ 在 $z=a$ 处具有代数阶 h 及 k，求证 fg 的阶为 $h+k$; f/g 的阶为 $h-k$; $f+g$ 的阶不大于 $\max(h, k)$.

2. 求证在整个平面上解析而在 ∞ 处具有一非本性奇点的函数是一多项式.

3. 求证函数 e^z, $\sin z$ 及 $\cos z$ 在 ∞ 处具有本性奇点.

4. 求证在扩充平面上的任一半纯函数是有理函数.

5. 证明 $f(z)$ 的一个孤立奇点是可去的，只要 $\operatorname{Re} f(z)$ 或 $\operatorname{Im} f(z)$ 上有界或下有界. [提示: 应用一个分式线性变换.]

6. 证明 $f(z)$ 的一个孤立奇点不能是 $\exp f(z)$ 的一个极点. [提示: f 和 e^f 不能有公共的极点(为什么?). 然后再应用定理 9.]

3.3 局部映照

我们从证明一个可用以确定解析函数零点个数的一般公式开始. 我们所要考虑的函数 $f(z)$ 在开圆盘 Δ 内解析且不恒等于零. 令 γ 为 Δ 内的一条闭曲线, 在 γ 上 $f(z)\neq 0$. 为了简单起见, 先设 $f(z)$ 在 Δ 内只有有穷个零点, 记为 $z_1, z_2, \cdots, z_n$, 这里, 每个零点有几阶就重复算几次.

反复应用定理 8, 或其推论(30)式, 就有 $f(z)=(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_n)g(z)$, 这里 $g(z)$ 在 Δ 内解析且 $\neq 0$. 对于 $z\neq z_j$, 特别是对于 γ 上的 z, 作对数导数, 得到

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{1}{z-z_1}+\frac{1}{z-z_2}+\cdots+\frac{1}{z-z_n}+\frac{g'(z)}{g(z)}.$$

由于在 Δ 内 $g(z)\neq 0$, 故由 Cauchy 定理得到

$$\int_\gamma \frac{g'(z)}{g(z)}\,dz=0.$$

再根据 $n(\gamma, z_j)$ 的定义, 有

$$n(\gamma, z_1)+n(\gamma, z_2)+\cdots+n(\gamma, z_n)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz. \tag{31}$$

若$f(z)$在Δ内具有无穷多个零点，上式仍正确．事实上，γ显然包在一个小于Δ的同心圆盘Δ'之中．除非$f(z)$恒等于零(这一情形显然应予剔除)，否则它在Δ'中只能有有穷个零点．这是Bolzano-Weierstrass定理的一个明显的推论，因为如果有无穷多个零点，则它们必有一个聚点在Δ'的闭包内，但这是不可能的．现在对圆盘Δ'应用公式(31)．在Δ'之外的零点满足条件$n(\gamma, z_j)=0$，因此对(31)中的和不起影响．这样就证明了下面的定理：

定理 10　设函数$f(z)$在圆盘Δ内解析且不恒等于零，z_j为函数$f(z)$的零点，各个零点按其阶数重复计数．对于Δ内每一条不通过零点的闭曲线γ，有

$$\sum_j n(\gamma, z_j)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz, \tag{32}$$

这里的和只有有穷的项不为0.

函数$w=f(z)$将γ映成w平面中的闭曲线Γ，故得

$$\int_\Gamma \frac{dw}{w}=\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz.$$

因此，公式(32)具有如下的解释：

$$n(\Gamma, 0)=\sum_j n(\gamma, z_j). \tag{33}$$

这一定理最简单而最有用的应用是用于已知每一个$n(\gamma, z_j)$应等于0或1的情形．这时，(32)式给出了计算γ内部零点总数的公式．当γ是一个圆的时候显然就是这种情形．

设a为一任意复数，对$f(z)-a$应用定理10．$f(z)-a$的零点就是方程$f(z)=a$的根，记为$z_j(a)$．代替公式(32)，得到公式

$$\sum_j n(\gamma, z_j(a))=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)-a}\,dz,$$

同时，(33)式变为

$$n(\Gamma, a)=\sum_j n(\gamma, z_j(a)).$$

这里必须设$f(z)$在γ上$\neq a$.

如果a及b位于Γ所确定的同一个区域中，则

$$n(\Gamma, a)=n(\Gamma, b),$$

因此又有　　$\sum_j n(\gamma, z_j(a)) = \sum_j n(\gamma, z_j(b))$.

如 γ 为一圆，则在 γ 内部，$f(z)$ 取值 a 及取值 b 的次数相等. 下面关于局部对应的定理就是这一结果的直接推论.

定理 11　设 $f(z)$ 在 z_0 处解析，$f(z_0)=w_0$，并设 $f(z)-w_0$ 在 z_0 处具有一 n 阶零点. 若 $\varepsilon>0$ 足够小，则必存在一个对应的 $\delta>0$，对于所有使 $|a-w_0|<\delta$ 的 a，方程 $f(z)=a$ 在圆盘 $|z-z_0|<\varepsilon$ 内恰具有 n 个根.

我们可以选择 ε，使 $f(z)$ 在圆盘 $|z-z_0|\leqslant\varepsilon$ 内有定义而解析，且使 z_0 是 $f(z)-w_0$ 在这一圆盘中唯一的一个零点. 设 γ 为圆 $|z-z_0|=\varepsilon$，并设 γ 在映照 $w=f(z)$ 下的象为 Γ. 由于 w_0 属于闭集 Γ 的余集，故必存在一个不与 Γ 相交的邻域 $|w-w_0|<\delta$（图 4-7）. 由此直接可知，在 γ 内部取这一邻域中的任一值 a 的次数全相等. 但方程 $f(z)=w_0$ 在 γ 内部恰有 n 个相重的根，故知每一值 a 在 γ 内部将取 n 次. 应当理解，重根是根据其相重数计数的，但如 ε 取得充分小，使得 $f'(z)$ 在 $0<|z-z_0|<\varepsilon$ 上也不等于零，于是我们可以断言，当 $a\neq w_0$ 时，方程 $f(z)=a$ 的所有根都是单根.

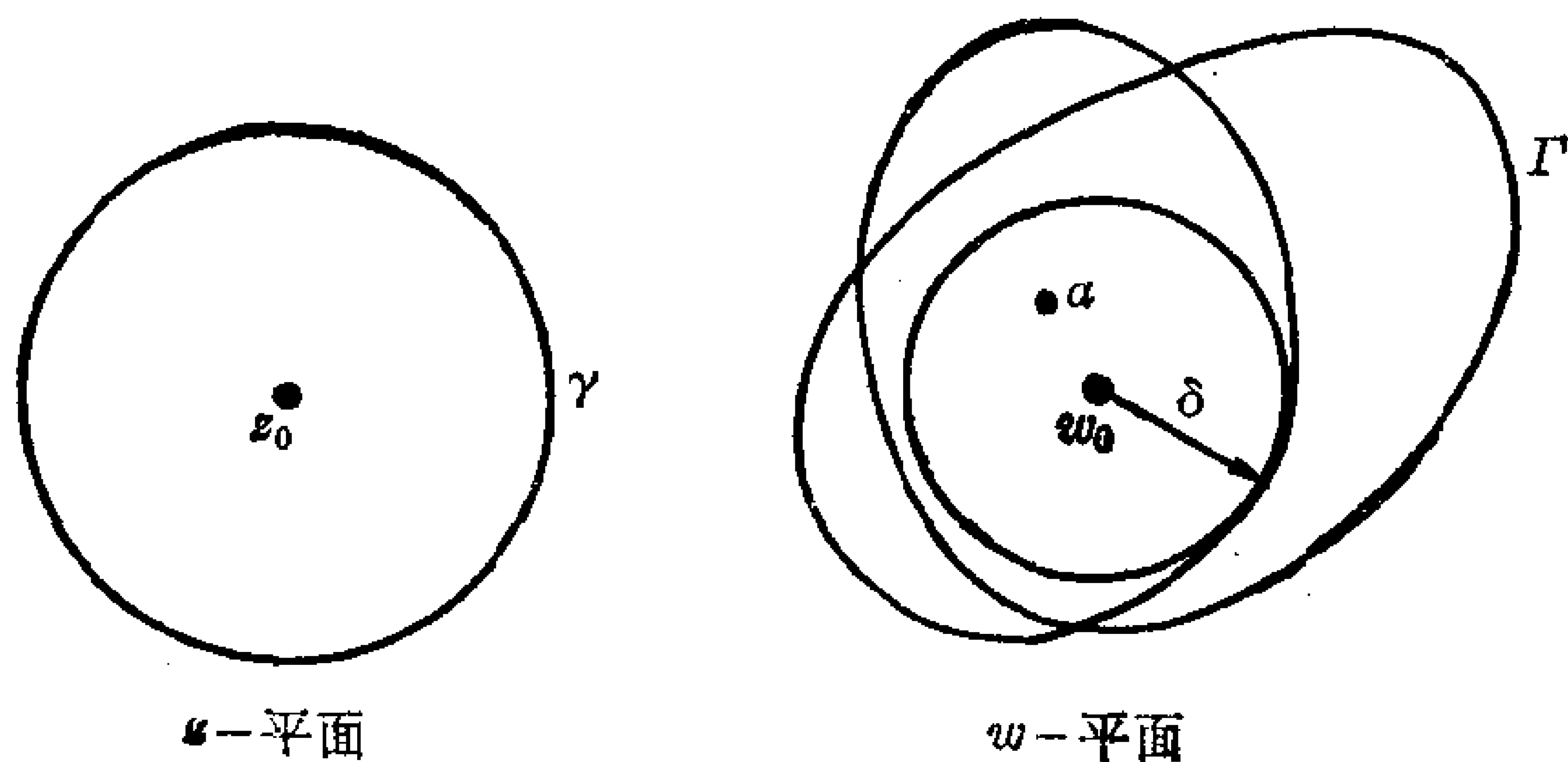


图 4-7　局部对应

系 1　一个非常数的解析函数将开集映成开集.

这就是说每一充分小的圆盘 $|z-z_0|<\varepsilon$ 的象包含一邻域 $|w-w_0|<\delta$.

在 $n=1$ 的情形，圆盘 $|w-w_0|<\delta$ 与 $|z-z_0|<\varepsilon$ 的一个开子集 Δ 之间存在一一对应的关系. 因为 z 平面上的开集对应于 w 平

面上的开集，故$f(z)$的反函数是连续的，映照是拓扑的．这个映照可以限制在Δ中z_0的一个邻域内，因此有：

系2 设$f(z)$在z_0点解析，且$f'(z_0)\neq 0$，则它把z_0的一个邻域共形地而且拓扑地映成一个域．

从反函数的连续性，根据通常方法可知反函数是解析的，因此逆映照也是共形的．反之，如果局部映照是一对一的，则定理11只在$n=1$时成立，因此$f'(z_0)$必异于零．

对于$n>1$，局部对应仍可精确地描述．在定理11的假设条件下，可令

$$f(z)-w_0=(z-z_0)^n g(z),$$

式中$g(z)$在z_0点解析，并且$g(z_0)\neq 0$．选取一个$\varepsilon>0$，使当$|z-z_0|<\varepsilon$时有$|g(z)-g(z_0)|<|g(z_0)|$．在这一邻域中，有可能定义$\sqrt[n]{g(z)}$的一个单值解析分支，记为$h(z)$．于是

$$f(z)-w_0=\zeta(z)^n,$$
$$\zeta(z)=(z-z_0)h(z).$$

由于$\zeta'(z_0)=h(z_0)\neq 0$，故映照$\zeta=\zeta(z)$在z_0的邻域中是拓扑的．另一方面，映照$w=w_0+\zeta^n$是初等性质的，对于每一个w的值，确定n个等间隔的ζ值．如果我们分两步来完成这一映照，就可得到局部对应的一个很清晰的图．图4-8表示一个小圆盘的原象，以及映成正的半径的n段弧．

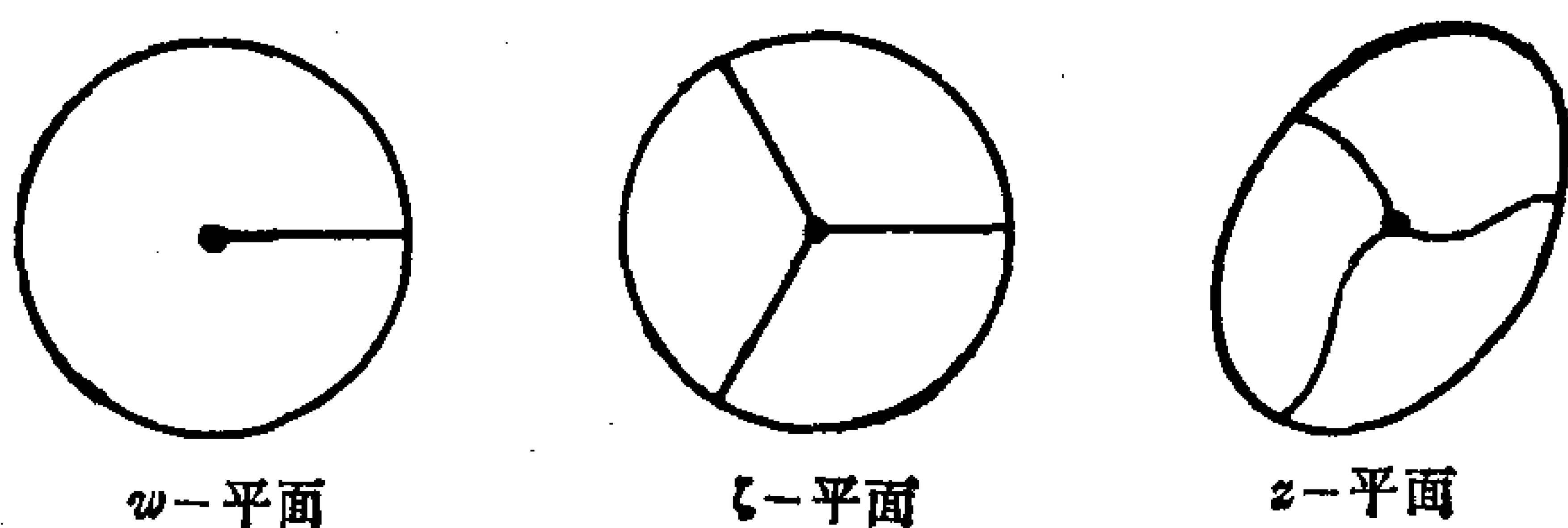


图4-8 支点：$n=3$

习 题

1．试明白确定原点周围的最大圆盘，它在映照$w=z^2+z$下的象是一对

一的.

2. 试对 $w=e^z$ 解上题.

3. 应用表示式 $f(z)=w_0+\zeta(z)^n$ 于 $\cos z$, 其中 $z_0=0$. 确定 $\zeta(z)$.

4. 如果 $f(z)$ 在原点解析, 且 $f'(0)\neq 0$, 证明: 存在一个解析函数 $g(z)$, 使在原点的邻域中,有 $f(z^n)=f(0)+g(z)^n$.

3.4 极值原理

定理 11 的系 1 具有一个非常重要的分析推理,称为解析函数的极值原理. 由于它简单明显, 所以是函数论中最有用的一般定理之一. 通常,以极值原理为根据的证明都非常简捷,故一般都十分乐于使用这一类的证明.

定理 12(极值原理) 设函数 $f(z)$ 在 Ω 内解析且不等于常数, 则它的绝对值 $|f(z)|$ 在 Ω 内没有极大值.

这一定理的证明是很明显的. 如 $w_0=f(z_0)$ 为函数在 Ω 内所取的任一值,则在 Ω 的象之中必存在一邻域 $|w-w_0|<\varepsilon$. 在这一邻域中,存在若干个点,它们的模 $>|w_0|$, 因此 $|f(z_0)|$ 不是 $|f(z)|$ 的极大值.

这一定理也可正面表达如下:

定理 12 设 $f(z)$ 在一有界闭集 E 上解析, 则 $|f(z)|$ 的极大值出现在 E 的边界上.

由于 E 是紧致的,所以 $|f(z)|$ 在 E 上有一极大值,假定出现在 z_0 处. 如果 z_0 是边界点,则定理的断言已证明了; 如果 z_0 是内点, 那么 $|f(z_0)|$ 也将是 $|f(z)|$ 在包含于 E 中的圆盘 $|z-z_0|<\delta$ 内的极大值. 但这是不可能的, 除非 $f(z)$ 在包含 z_0 的 E 的内部的分集中是常数. 于是由连续性可知, $|(z)|$ 在该分集的整个边界上等于它的极大值. 这一边界非空, 且包含在 E 的边界中. 因此, 极大值总出现在边界上.

极值原理也可用分析的观点来证明, 作为 Cauchy 积分公式的一个推理. 在公式(22)中, 把 γ 取作一个圆,其圆心在 z_0, 半径为 r, 则在 γ 上, $\zeta=z_0+re^{i\theta}$, $d\zeta=ire^{i\theta}d\theta$, 因此,对于 $z=z_0$, 有

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+re^{i\theta})d\theta. \tag{34}$$

这一公式表明:一个解析函数在其解析域内任一闭圆盘 $|z-z_0|\leqslant r$ 的圆心的值等于它在圆上的值的算术平均数.

从公式(34)可导出不等式

$$|f(z_0)|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(z_0+re^{i\theta})|d\theta. \tag{35}$$

假设 $|f(z_0)|$ 是一极大值. 于是将会有 $|f(z_0+re^{i\theta})|\leqslant|f(z_0)|$, 如果严格的不等关系对于 θ 的某一个值成立,则根据连续性,它在一个整个弧段上都成立. 但这时 $|f(z_0+re^{i\theta})|$ 的平均值将严格地小于 $|f(z_0)|$, 于是 (35) 将会引出矛盾 $|f(z_0)|<|f(z_0)|$. 因此, $|f(z)|$ 在所有充分小的圆 $|z-z_0|=r$ 上必恒等于 $|f(z_0)|$, 故 $|f(z)|$ 在 z_0 的一个邻域中也恒等于 $|f(z_0)|$. 由此不难看出 $f(z)$ 必为一常数. 这一理由提供了极值原理的第二个证明方法. 我们优先提出第一个证法是由于它表明了极值原理是用解析函数所作映照的拓扑性质的一个推理.

现在我们来考察在开圆盘 $|z|<R$ 内解析而在闭圆盘 $|z|\leqslant R$ 上连续的函数 $f(z)$. 如在 $|z|=R$ 上已知 $|f(z)|\leqslant M$, 则根据前面的说明,在整个圆盘内将有 $|f(z)|\leqslant M$. 等号仅当 $f(z)$ 是常数且绝对值等于 M 时成立. 因此, 如果已知 $f(z)$ 取某一值, 其模 $<M$, 则应当可以求得一较优的估值. 这一方面的定理很有用. 下面一个特殊结果称为 Schwarz 引理.

定理 13 如果函数 $f(z)$ 对于 $|z|<1$ 解析,且满足条件 $|f(z)|\leqslant 1$, $f(0)=0$, 则 $|f(z)|\leqslant|z|$, 且 $|f'(0)|\leqslant 1$. 等号仅当 $f(z)=cz$ 时成立,此处 c 为一常数,其绝对值等于 1.

设函数 $f_1(z)$ 在 $z\neq 0$ 时等于 $f(z)/z$, 在 $z=0$ 时等于 $f'(0)$, 对这一函数应用极值原理. 在圆 $|z|=r<1$ 上, 其绝对值 $\leqslant 1/r$, 因此当 $|z|\leqslant r$ 时, $|f_1(z)|\leqslant 1/r$. 令 r 趋近于 1, 则对于所有的 z, $|f_1(z)|\leqslant 1$, 这就是定理的结论. 如在某一点上等式成立,那就是说 $|f_1(z)|$ 达到极大值,因而 $f_1(z)$ 应变为一常数.

定理 13 的假设多少有点特殊，但这并不是主要的，应看作是规格化的结果．例如，如已知 $f(z)$ 在半径为 R 的圆盘内满足定理的条件，则可应用定理的原始形式于函数 $f(Rz)$．结果得 $|f(Rz)|\leqslant|z|$，这一式又可写为 $|f(z)|\leqslant|z|/R$．同样，如果模的上界不是 1 而是 M，则可应用定理于 $f(z)/M$，或更一般的，应用于 $f(Rz)/M$．结果，不等式为 $|f(z)|\leqslant M|z|/R$．

更一般地来说，我们可把条件 $f(0)=0$ 换为任意条件 $f(z_0)=w_0$，这里 $|z_0|<R$，$|w_0|<M$．设 $\zeta=Tz$ 为一线性变换，它将 $|z|<R$ 映成 $|\zeta|<1$，以 z_0 对应于原点，并设 Sw 为一线性变换，$Sw_0=0$，且将 $|w|<M$ 映成 $|Sw|<1$．显然函数 $Sf(T^{-1}\zeta)$ 满足原来定理的假设．因此可得 $|Sf(T^{-1}\zeta)|\leqslant|\zeta|$，或 $|Sf(z)|\leqslant|Tz|$．更明显地表示时，这一不等式可写成如下形式：

$$\left|\frac{M(f(z)-w_0)}{M^2-\bar{w}_0f(z)}\right|\leqslant\left|\frac{R(z-z_0)}{R^2-\bar{z}_0z}\right|. \tag{36}$$

习　　题

1．用(36)式或直接证明：当 $|z|\leqslant1$ 时 $|f(z)|\leqslant1$ 就蕴涵着

$$\frac{|f'(z)|}{(1-|f(z)|^2)}\leqslant\frac{1}{1-|z|^2}.$$

2．若 $f(z)$ 解析，且当 $\operatorname{Im}z>0$ 时 $\operatorname{Im}f(z)\geqslant0$，证明

$$\frac{|f(z)-f(z_0)|}{|f(z)-\overline{f(z_0)}|}\leqslant\frac{|z-z_0|}{|z-\bar{z}_0|}$$

和

$$\frac{|f'(z)|}{\operatorname{Im}f(z)}\leqslant\frac{1}{y}\quad(z=x+iy).$$

3．在习题 1 和 2 中，证明：等号成立就意味着 $f(z)$ 是一线性变换．

4．若 $f(z)$ 将 $|z|<1$ 映入上半平面，试导出相应的不等式．

5．试用 Schwarz 引理证明每一个将圆盘映成圆盘的一一共形映照可借线性变换来实现．

*6．设 γ 是 $|z|<1$ 中的一个逐段可微弧，积分

$$\int_\gamma\frac{|dz|}{1-|z|^2}$$

称为 γ 的非欧长度(或双曲长度)．证明：当 $|z|<1$ 时，$|f(z)|<1$ 的解析函

数 $f(z)$将每一个 γ 映成一个具有较小或相等非欧长度的弧.

证明将单位圆盘映成自身的线性变换保持非欧长度不变，并用显式计算验证结果.

*7. 证明在单位圆盘中连接两个给定点而具有最小非欧长度的弧是正交于单位圆的圆弧.（使用一个将连接的一个端点变成原点，另一个端点变成正实轴上一点的线性变换.）

最短非欧长度称为两个端点之间的非欧距离. 试推导 z_1 与 z_2 之间的非欧距离的一个公式。

答: $\dfrac{1}{2}\log\dfrac{1+\left|\dfrac{z_1-z_2}{1-\bar{z}_1z_2}\right|}{1-\left|\dfrac{z_1-z_2}{1-\bar{z}_1z_2}\right|}$.

*8. 在上半平面内应如何定义非欧长度?

4 Cauchy 定理的一般形式

上面我们讨论 Cauchy 定理和积分公式的时候，所考虑的只是圆域的情形. 这在研究解析函数的局部性质时是十分适宜的，但从更一般的角度来看，我们不能满足于这样不完全的结果. 要把这一结果推广至一般情形可有两种方式：其一是求得 Cauchy 定理普遍有效的区域特性；其二是就任意区域找出曲线 γ，使 Cauchy 定理的论断在其上有效。

4.1 链和闭链

首先，我们必须将线积分的概念加以推广. 为此，考察等式

$$\int_{\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_n} f\,dz=\int_{\gamma_1} f\,dz+\int_{\gamma_2} f\,dz+\cdots+\int_{\gamma_n} f\,dz. \qquad (37)$$

这一式在 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n$ 是弧 γ 的各分段时正确. 由于(37)式的右边对任何有限的组合都有意义，所以我们尽可以考虑一任意的形式和 $\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_n$，它不一定是一段弧，并用等式(37)直接定义对应的积分. 弧的这种形式和叫做链. 显然，考察沿着任意链的线积分将不会有所失，相反，还可以得到很多方便.

正象一段弧的分割没有唯一的方法一样，不同的形式和可以代表同一链．指导原则是：两个链，如果对于所有的函数 f 得出同样的线积分，则它们应认为恒等．将这一原则加以分析，可知下面的运算并不影响到链的恒等：(1)两段弧的置换；(2)一段弧的分割；(3)各分段弧合并为单一弧；(4)弧的再参数化；(5)反向弧的相消．从这一基础出发，不难立出一个逻辑的等价关系，用它可形式地定义链的恒等．但由于我们的研究并不包含任何逻辑的高度要求，所以这里不作深入的讨论．

两链的和可用并列法按通常方式定义．很明显，线积分的加法性质(37)对任意的链保持有效．当恒等的链相加时，为了方便起见，可用倍数来表示它们的和．因此，每一链可写成如下形式：

$$\gamma=a_1\gamma_1+a_2\gamma_2+\cdots+a_n\gamma_n, \tag{38}$$

式中 a_j 都是正整数，γ_j 全不相同．对于反向的弧，可令 $a(-\gamma)=-a\gamma$，而将(38)式化简，一直到任何两个 γ_j 都不相反时为止．系数都是任意整数，具有零系数的项可任意加入．这使我们有可能用同样的弧来表示任意两个链，于是把对应系数相加就可得两链之和．零链是指空的链的和或指所有系数都等于零的链的和．

若一链可用若干闭曲线的和来表示，则称这一链为闭链．通过极为简单的组合分析就知道，要一个链成为闭链，其充要条件是任一表示式中个别弧段的起点和终点成对地相重．这样，要看一个链是否为闭链就很容易．

在应用中，我们要讨论的是包含在给定开集 Ω 中的链．这就是说链可以用 Ω 中的弧来表示，而我们所要考虑的也只是这种表示式．不难看出，以前我们立出的所有对域中闭曲线成立的许多定理事实上对域中的任意闭链都正确，特别是，一正合微分沿着任一闭链的积分等于零．

一点关于闭链的指示数完全可仿照单一闭曲线情形的同样方法来定义．它具有同样的性质，此外，我们还可将十分明显而又非常重要的加法定理表达为 $n(\gamma_1+\gamma_2,\ a)=n(\gamma_1,\ a)+n(\gamma_2,\ a)$．

4.2 单连通性

如果我们说一个域没有孔，它的意义无疑地是为读者所了解的. 这样的域称为单连通域，而正是对于单连通域，Cauchy 定理才是普遍成立的. 我们所用这句示意性的话不能代替数学的定义，但稍加修正即可使之精确化. 大家知道，一个没有孔的域显然就是这样的一个域，即它的余集是由单独的一整片组成，因此可得如下的定义：

定义 1 一个域，如果它关于扩充平面的余集是连通的，则这一域是单连通的.

这里要提醒读者，这一定义并不是普遍能接受的一个定义，主要原因是此定义对高于 2 维的实情形不能用. 不过，在今后讨论过程中将会看到，由定义 1 表达的性质等价于许多或多或少同样重要的其他性质. 其中之一是说，任一闭曲线可以收缩成一点，而这个条件常常被选作定义. 我们所选的定义有它方便之处，即可很快引导到复积分理论中的本质结果上去.

不难看出，圆盘、半平面、平行的带域等都是单连通的. 最后一个例子说明余集应对扩充平面来取的重要性，因为带域在没有无穷远点的平面中的余集显然不是连通的. 这一定义也适用于 Riemann 球面上的域，显然，这是最对称的情形. 拿我们的目的来说，最好还是约定所有的域除另有说明者外指的总是有穷平面上的域. 根据这一约定，一个圆的外部就不是单连通的，因为它的余集是由一个闭圆盘及无穷远点所组成.

定理 14 为要一个域 Ω 是单连通的，必须而且只须对于 Ω 内的所有闭链 γ 及不属于 Ω 的所有点 a，均有 $n(\gamma, a)=0$.

这一备择条件也是颇有示意性的. 它说明单连通域中的一条闭曲线不能环绕域外的任何一点. 很容易看出，这一条件在域有孔时不能满足.

条件的必要性几乎是不证自明的. 设 γ 为 Ω 中的任一闭链. 如 Ω 的余集是连通的，则它必包含于由 γ 所确定的一个域中，而

因无穷远点属于这一余集，故知包含这一余集的域必无界．因此，对于余集中一切有穷的点，必有 $n(\gamma, a)=0$.

为了精确证明条件的充分性，我们必须作出一个明显的图．设 Ω 的余集可用两个不相交的闭集 A, B 的并 $A\cup B$ 来表示．二集之一包含 ∞，因此另一个是有界的；设 A 为有界集．集 A 与 B 的最短距离 $\delta>0$．用边长 $<\delta/\sqrt{2}$ 的正方形网 Q 遮盖整个平面．网可自由选定，使某一点 $a\in A$ 位于一正方形的中心．Q 的边界曲线记为 ∂Q；设正方形 Q 是闭的，并设 Q 的内部位于组成 ∂Q 的有向线段的左边．

现在考察闭链

$$\gamma=\sum_j \partial Q_j, \tag{39}$$

其中的总和是按网中所有与 A 有一公共点的正方形 Q_j 来取的(图 4-9)．由于 a 包含于一个而且只包含于一个正方形之中，故显然有 $n(\gamma, a)=1$．不仅如此，曲线 γ 显然不与 B 相交．但如进行相消之后，同样可以看出 γ 不与 A 相交．事实上，任何一条与 A 相交的边必然是包含于和式(39)中的两个正方形的公共边，由于它们的方向相反，故在 γ 的简化公式中不会有这种边出现．因此 γ 包含于 Ω，于是定理得证．

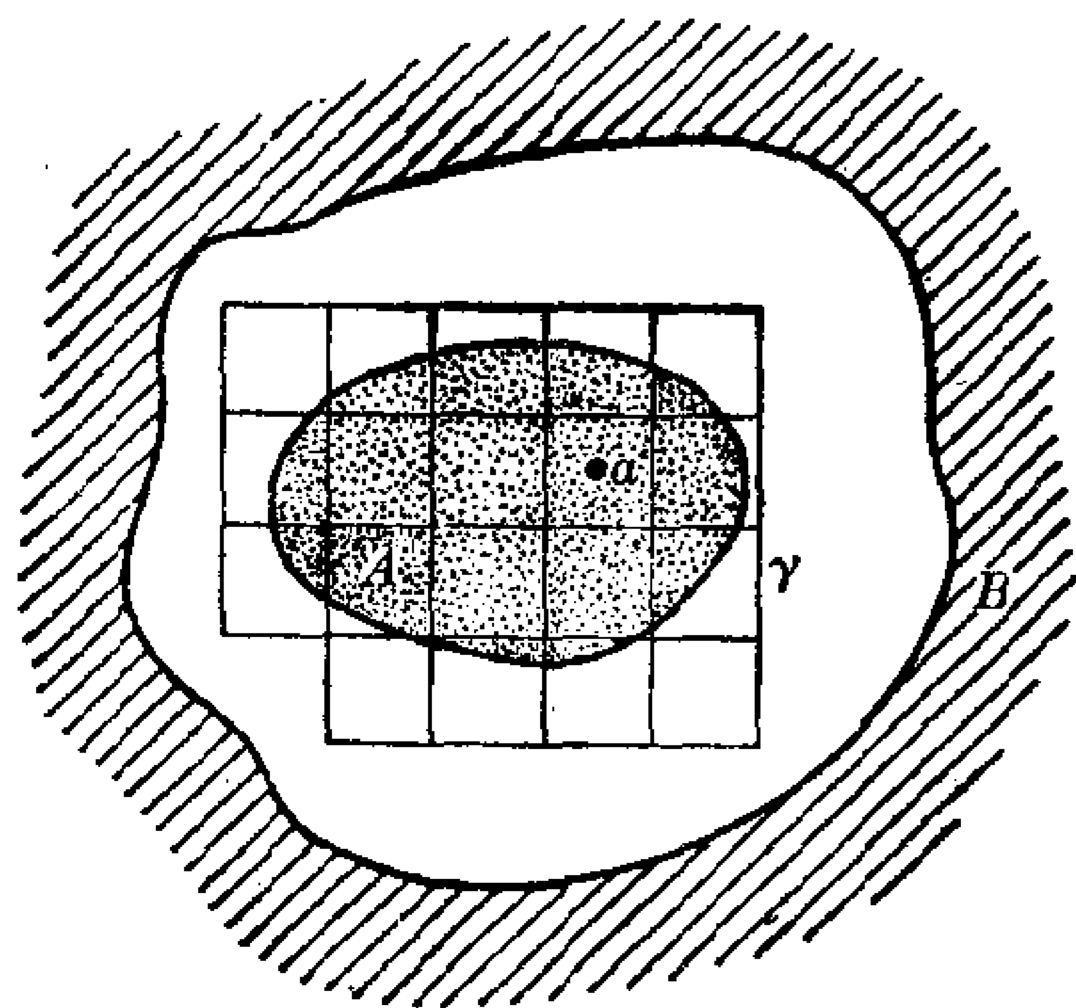


图 4-9　指示数为 1 的曲线

现在我们来说明 Cauchy 定理对于不是单连通的区域肯定不生效．事实上，如果在 Ω 内有一闭链 γ，对于 Ω 外的某一 a，满足条件 $n(\gamma, a)\neq 0$，则 $1/(z-a)$ 在 Ω 内解析，而它的积分

$$\int_\gamma \frac{dz}{z-a}=2\pi i n(\gamma, a)\neq 0.$$

4.3　同调

由定理 14 刻划的单连通性为单连通区域中的所有闭链找出

了一条共同的性质，但对于任意区域或任意开集中的闭链来说，可能具有这种性质，也可能不具有这种性质．这一性质在拓扑学中起着重要作用，因而赋予一个特殊的名称．

定义 2 开集 Ω 中的闭链 γ 称为关于 Ω 同调于零，如果对于 Ω 的余集中的所有点 a，均有 $n(\gamma, a)=0$．

用记号表示，就是 $\gamma\sim 0(\mathrm{mod}\,\Omega)$．当所参考的开集已经很明显时，$\Omega$ 就可省略．记号 $\gamma_1\sim\gamma_2$ 等价于 $\gamma_1-\gamma_2\sim 0$．同调关系可以相加与相减，而 $\gamma\sim 0(\mathrm{mod}\,\Omega)$ 就意味着对所有 $\Omega'\supset\Omega$，有 $\gamma\sim 0$ $(\mathrm{mod}\,\Omega')$．

又，我们的术语与标准用法并不完全一致．用零环绕次数来刻划同调性是 Emil Artin 发现的．正是他把同调性与 Cauchy 定理的一般形式所需用的特性紧密地联系起来．这一概念使早先的一些证明大大简化了．

4.4 Cauchy 定理的一般叙述

现在，Cauchy 定理的确定形式很容易陈述为

定理 15 如果 $f(z)$ 在 Ω 中解析，则对于在 Ω 中同调于零的任一闭链 γ，恒有

$$\int_\gamma f(z)dz=0. \tag{40}$$

在一种不同的叙述中，我们要求，如果 γ 是使(40)对某一族解析函数成立，即对形如 $1/(z-a)$ 的解析函数族成立，这里 $a\in\Omega$，则它对 Ω 中所有的解析函数成立．

与定理 14 结合起来，就得到下列的系：

系 1 如果 $f(z)$ 在一个单连通区域 Ω 中解析，则(40)对 Ω 中所有闭链 γ 成立．

在证明定理之前，我们先来看一看与 1.3 节相联系的事实．在这方面，如同已经指出的，(40)对区域中的所有闭曲线 γ 成立就意味着 $f\,dz$ 的线积分是与积分路径无关的，或者说，$f\,dz$ 是一个正合微分．于是，根据定理 1，有一个单值的解析函数 $F(z)$，使得

$F'(z)=f(z)$(多余的词“单值的”只是用于强调)．这样，在单连通区域中，任一解析函数都是一个导函数．

经常出现这一事实的一个特殊应用是：

系 2 如果 $f(z)$ 在单连通区域 Ω 中解析且 $\neq 0$，则在 Ω 中，可定义 $\log f(z)$ 和 $\sqrt[n]{f(z)}$ 的单值解析分支．

事实上，我们知道，在 Ω 中存在一个解析函数 $F(z)$，使得 $F'(z)=f'(z)/f(z)$． 函数 $f(z)e^{-F(z)}$ 的导数为零，因此是一常数．选取一点 $z_0\in\Omega$ 和无穷多个值 $\log f(z_0)$ 之一，得

$$e^{F(z)-F(z_0)+\log f(z_0)}=f(z),$$

因此可令 $\log f(z)=F(z)-F(z_0)+\log f(z_0)$．为定义 $\sqrt[n]{f(z)}$，只要将它写成形式 $\exp((1/n)\log f(z))$ 即可．

4.5 Cauchy 定理的证明[●]

我们从一个与定理 14 证明相平行的结构开始． 先设 Ω 是有界的，尔后则是任意的． 给定 $\delta>0$，我们用边长为 δ 的正方形网覆盖平面，将 Ω 中所含网内的闭正方形记为 Q_j, $j\in J$；由于 Ω 是有界的，所以集 J 是有穷的，如 δ 充分小，它是不空的． 正方形 Q_j, $j\in J$ 的并由一些闭区域组成，这些闭区域的有向边界构成闭链

$$\Gamma_\delta=\sum_{j\in J}\partial Q_j.$$

很明显，Γ_δ 是一些有向线段的和，这些线段恰好都是一个 Q_j 的边． 用 Ω_δ 表示并 $\cup Q_j$ 的内部(图 4-10)．

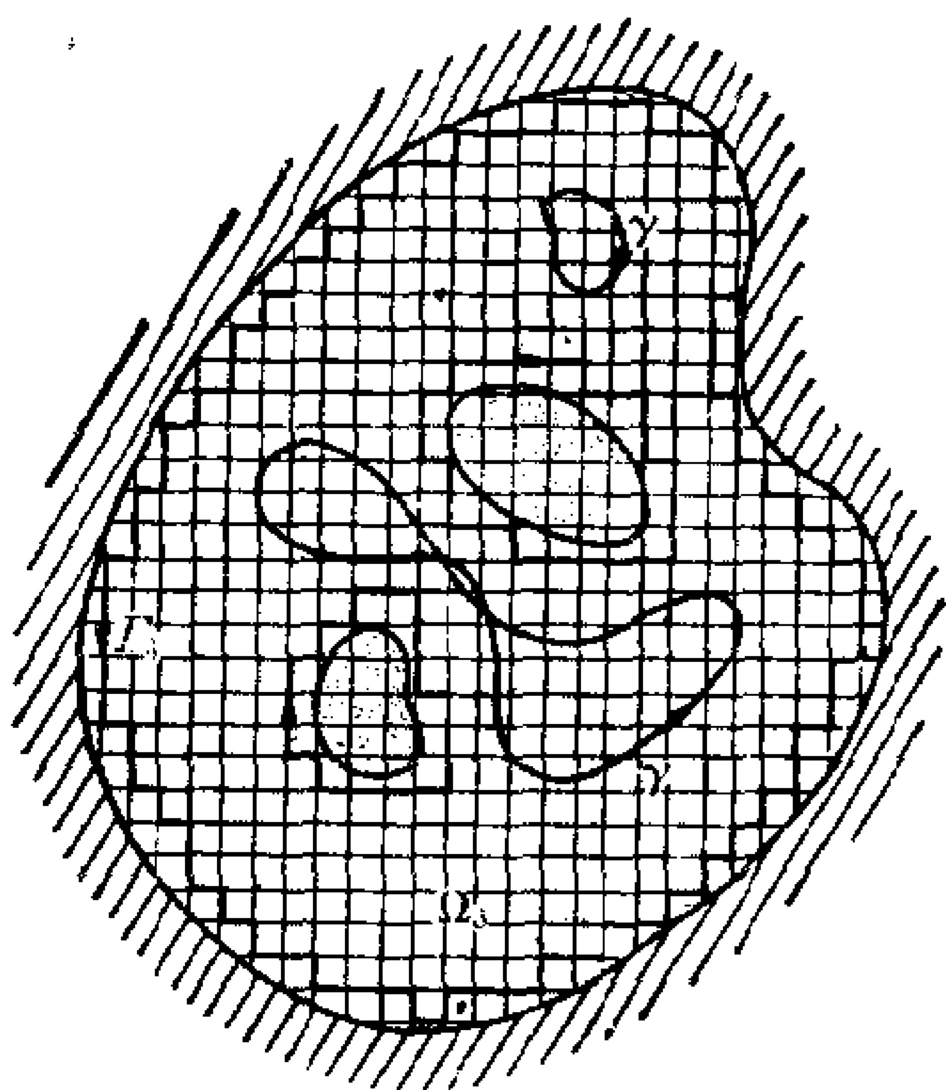


图 4-10

设 γ 是在 Ω 内同调于零的一个闭链；选 δ 如此小，使 γ 含于 Ω_δ 内．考察一点 $\zeta\in\Omega-\Omega_\delta$． 它至少属于一个 Q，这 Q 不是一个 Q_j． 存在一点 $\zeta_0\in Q$，它不属于 Ω． 可以用位于 Q

● 这一证明是根据 A. F. Beardon 的建议作出的。

中的一线段连接 ζ 和 ζ_0，因此这线段不与 Ω_δ 相交．由于 γ 看作一个点集含于 Ω_δ 中，故知 $n(\gamma, \zeta)=n(\gamma, \zeta_0)=0$．特别，对于 Γ 上的所有点 ζ，有 $n(\gamma, \zeta)=0$.

现在假设 f 在 Ω 中解析．如果 z 位于 Q_{j_0} 的内部，则

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial Q_j}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}=\begin{cases}f(z), & \text{若 } j=j_0;\\ 0, & \text{若 } j\neq j_0.\end{cases}$$

因此

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\delta}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}. \tag{41}$$

由于上式两边都是 z 的连续函数，故上式对所有的 $z\in Q_\delta$ 成立.

作为一个推论，我们得到

$$\int_\gamma f(z)dz=\int_\gamma\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\delta}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}\right)dz. \tag{42}$$

累积分的被积函数是两个积分变量，即 Γ_δ 和 γ 的参数的连续函数．因此，积分次序可以调换．换言之，

$$\int_\gamma\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\delta}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}\right)dz=\int_{\Gamma_\delta}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{dz}{\zeta-z}\right)f(\zeta)d\zeta.$$

右端的内层积分是 $-n(\gamma, \zeta)=0$．因此积分(42)为零，这样就对有界的 Ω 证明了定理.

如果 Ω 是无界的，我们就用 Ω 与足以包含 γ 的圆盘 $|z|<R$ 的交 Ω' 代替 Ω．在 Ω' 的余集中的任一点 a，或者落在 Ω 的余集中，或者位于圆盘的外部．不论在哪种情况，总有 $n(\gamma, a)=0$，所以 $\gamma\sim 0\ (\mathrm{mod}\ \Omega')$．证明可应用于 Ω'，由此证明了定理对任意的 Ω 正确.

4.6 局部正合微分

微分 $p\,dx+q\,dy$ 称为在 Ω 中是**局部正合**的，如果它在 Ω 的每一点的某个邻域中是正合的．不难看出(下面的习题 1)$p\,dx+q\,dy$ 为局部正合的充要条件是：对于所有的 $\gamma=\partial R$，有

$$\int_\gamma p\,dx+q\,dy=0, \tag{43}$$

其中 R 是 Ω 中的一个矩形. 这一条件当 $p\,dx+q\,dy=f(z)dz$ 时肯定得到满足, 其中 f 在 Ω 中解析, 于是由定理 15, 对任何闭链 $\gamma\sim 0(\mathrm{mod}\ \Omega)$, (43)成立.

定理 16 如果 $p\,dx+q\,dy$ 在 Ω 中局部正合,则对于 Ω 中任一闭链 $\gamma\sim 0$, 有下式成立:

$$\int_\gamma p\,dx+q\,dy=0.$$

看来这里并没有修改定理 15 的证明的任何直接途径可使之包容这一更为普遍的情况. 因此, 我们介绍 Cauchy 一般定理的两种证明方法. 象在本书早先两版中一样,定理 16 将用 Artin 的证法. Cauchy 定理的个别证明由于它的特殊吸引力也被收录.

对于定理 16 的证明, 首先要证明 γ 可用一个具水平边及垂直边的折线 σ 来代替, 使得每一局部正合微分沿着 σ 的积分与沿着 γ 的积分相等. 特别是,这一性质意味着对于 Ω 的余集中的 a, 有 $n(\sigma,\ a)=n(\gamma,\ a)$, 因而 $\sigma\sim 0$. 这样, 只要对具水平边与垂直边的折线证明定理就可以了.

作出 σ, 把它当作 γ 的一个近似. 设由 γ 至 Ω 的余集的距离为 ρ. 如果 γ 由 $z=z(t)$ 给出, 函数 $z(t)$ 在闭区间 $[a,\ b]$ 上是一致连续的. 确定 $\delta>0$, 使得当 $|t-t'|<\delta$ 时, $|z(t)-z(t')|<\rho$, 并将 $[a,\ b]$ 分成子区间, 其长度 $<\delta$. γ 的对应子弧 γ_i 具有这样的性质: 其每一个必包含在半径为 ρ 而整个位于 Ω 内的一个圆盘之中. γ_i 的端点可在同一圆盘内用由水平线段和垂直线段组成的折线 σ_i 来连接. 由于所给的微分在圆盘内是正合的, 故

$$\int_{\sigma_i} p\,dx+q\,dy=\int_{\gamma_i} p\,dx+q\,dy,$$

令 $\sigma=\sum\sigma_i$, 即得所要的

$$\int_\sigma p\,dx+q\,dy=\int_\gamma p\,dx+q\,dy.$$

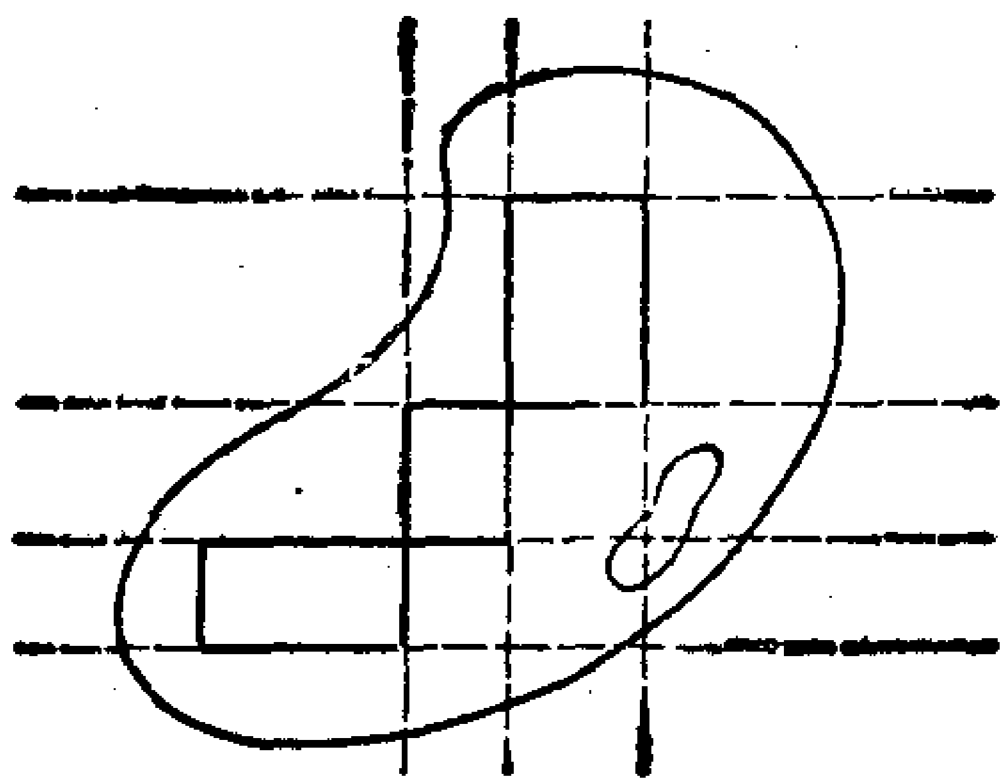


图 4-11

为继续证明, 我们将构成 σ 的所有线段延长至无穷(图 4-11). 这些线段将平面分成若干个有

穷的矩阵 R_i 和一些无界的区域 R'_j，这些 R'_j 可以看作是无穷的矩形.

从每一 R_i 的内部取一点 a_i，作成闭链

$$\sigma_0=\sum_i n(\sigma,\ a_i)\partial R_i, \tag{44}$$

其中的和取遍所有的有穷的矩形；系数 $n(\sigma,\ a_i)$ 是完全确定的，因为没有一个 a_i 位于 σ 上. 在下面的讨论中，我们也将用到从每个 R'_j 的内部选取的点 a'_j.

很明显，若 $k=i$, $n(\partial R_i,\ a_k)=1$; 若 $k\neq i$, $n(\partial R_i,\ a_k)=0$; 类似地，对所有的 j, $n(\partial R_i,\ a'_j)=0$. 据此，由(44)推得 $n(\sigma_0,\ a_i)=n(\sigma,\ a_i)$ 和 $n(\sigma_0,\ a'_j)=0$. 而对处于 σ 所确定的无界区域中的 R'_j 的内部，也有 $n(\sigma,\ a'_j)=0$ 成立. 这样，就证明了对于所有的 $a=a_i$ 和 $a=a'_j$，都有 $n(\sigma-\sigma_0,\ a)=0$.

从 $\sigma-\sigma_0$ 的这一性质，我们要推出 σ_0 与 σ 除了相差一些彼此互相抵消的线段之外是恒等的. 设 σ_{ik} 是两个相邻矩形 R_i 与 R_k 的公共边；取定向使 R_i 位于 σ_{ik} 的左边. 假定 $\sigma-\sigma_0$ 的简化后的表达式包含因子 $c\sigma_{ik}$. 则闭链 $\sigma-\sigma_0-c\partial R_i$ 不含 σ_{ik}，由此可知 a_i 与 a_k 关于这一闭链必具有相同的指示数. 另一方面，这些指示数分别是 $-c$ 和 0；故 $c=0$. 同样的推理适用于 σ_{ij} 是有穷矩形 R_i 与无穷矩形 R'_j 的公共边的情形. 这样，一个有穷矩形的每一条边以系数零出现在 $\sigma-\sigma_0$ 中，从而证明了

$$\sigma=\sum_i n(\sigma,\ a_i)\partial R_i. \tag{45}$$

现在证明对应系数 $n(\sigma,\ a_i)$ 不为零的所有 R_i 实际上均含于 Ω 中：设闭矩形 R_i 中一点 a 不在 Ω 内. 则因 $\sigma\sim 0(\operatorname{mod}\Omega)$，有 $n(\sigma,\ a)=0$. 另一方面，a 与 a_i 之间的连线不与 σ 相交，因此，$n(\sigma,\ a_i)=n(\sigma,\ a)=0$. 于是从局部正合性可知，$p\,dx+q\,dy$ 在(45)中出现的任何 ∂R_i 上的积分等于零. 因此

$$\int_\sigma p\,dx+q\,dy=0.$$

于是定理 16 得证.

4.7 多连通域

一个不是单连通的域称为是多连通的．更确切点说，如果一个域 Ω 的余集恰具有 n 个分集，则称 Ω 具有有穷的连通数 n；如果它的余集具有无穷多个分集，则称 Ω 具有无穷的连通数．用稍不严格但更能示意的话来说，那就是在 Riemann 球面上穿 n 个孔就得连通数为 n 的域．

在连通数为有穷的情形，设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为 Ω 的余集的分集，并设 ∞ 属于 A_n．如果 γ 为 Ω 内的任一闭链，则就象在定理 14 中一样，可以证明，当 a 在任一分集 A_i 上变化时，$n(\gamma, a)$ 为常数，而且在 A_n 上 $n(\gamma, a)=0$．不仅如此，如果照样作出定理 14 证明中所用的图，则可得闭链 γ_i, $i=1, \cdots, n-1$，使得对于 $a\in A_i$，有 $n(\gamma_i, a)=1$，而对于所有其他在 Ω 外部的点，有

$$n(\gamma_i, a)=0.$$

对于 Ω 内一个已知闭链 γ，当 $a\in A_i$ 时设 $n(\gamma, a)$ 的常数值为 c_i．我们知道 Ω 外部任一点关于闭链 $\gamma-c_1\gamma_1-c_2\gamma_2-\cdots-c_{n-1}\gamma_{n-1}$ 的指示数等于零．换言之，

$$\gamma\sim c_1\gamma_1+c_2\gamma_2+\cdots+c_{n-1}\gamma_{n-1}.$$

因此，每一闭链同调于闭链 $\gamma_1, \cdots, \gamma_{n-1}$ 的一个线性组合．这一线性组合是唯一地确定的，因为如果同时有两个线性组合同调于同一闭链，则它们的差必是同调于 0 的一个线性组合．但闭链 $c_1\gamma_1+c_2\gamma_2+\cdots+c_{n-1}\gamma_{n-1}$ 显然环绕 A_i 中的点 c_i 次；因此它不能同调于 0，除非所有的 c_i 都等于零．

根据这一情况，我们称闭链 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_{n-1}$ 组成域 Ω 的**同调基**．同调基不是唯一的，但根据线代数的基本定理可得结论：每一个同调基都具有同样个数的元素．因此，具有有穷个同调基的每一域必具有有穷的连通数，而基元素的数目较连通数少一．

对于 Ω 内的任一解析函数 $f(z)$，根据定理 18 可得

$$\int_\gamma f\,dz=c_1\int_{\gamma_1} f\,dz+c_2\int_{\gamma_2} f\,dz+\cdots+c_{n-1}\int_{\gamma_{n-1}} f\,dz,$$

数
$$P_i=\int_{\gamma_i} f\,dz$$
只依赖于函数 f，而与 γ 无关．这些数称为微分 $f\,dz$ 的周期的模，或简称为不定积分的周期．我们已证明 $f(z)$ 沿任一闭链的积分是周期的线性组合，组合中的系数都是整数，而且沿着一段由 z_0 至 z 的弧的积分除周期的倍数外可完全确定．周期等于零是单值不定积分存在的必要和充分条件．

为了说明这一点，让我们考察由 $r_1<|z|<r_2$ 定义的一个环域的最简单情形．余集的分集为 $|z|\leqslant r_1$ 及 $|z|\geqslant r_2$；我们所考虑的将包括退化情形 $r_1=0$ 及 $r_2=\infty$ 在内．环域是双连通的，同调基由任一圆 $|z|=r$，$r_1<r<r_2$ 组成．如令这一圆为 C，则环域中的任一闭链将满足条件 $\gamma\sim nC$，这里 $n=n(\gamma, 0)$．一个解析函数沿闭链的积分等于单周期
$$P=\int_C f\,dz$$
的一个倍数，其值当然不依赖于半径 r．

习　题

1．不用定理 16，证明 $p\,dx+q\,dy$ 在 Ω 中局部正合的充要条件是：对边平行于坐标轴的每一个矩形 $R\subset\Omega$，
$$\int_{\partial R} p\,dx+q\,dy=0.$$

2．试证明从一个单连通域中移去 m 个点所成的区域是 $m+1$ 连通的，并求一同调基．

3．求证由一闭曲线所确定的有界域是单连通的，而无界域则是双连通的．

4．求证 $\log z$，z^{α} 及 z^{z} 的单值解析分支可定义于任一不包含原点的单连通域内．

5．试证明 $\sqrt{1-z^2}$ 的单值解析分支可定义在适合如下条件的任一区域中，条件是：点 ±1 落在这区域的余集的同一分集中．试求出沿着域中一条闭曲线的积分

$$\int\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

的可能值.

5 留数计算

上一节的结果表明，解析函数沿闭曲线的线积分的确定可以归结为周期的确定. 在某些情形下，周期可以不必通过计算或通过很少的计算手续而求得. 因此，我们有了一种在很多情况下不必通过计算即能求出积分的方法. 这在实用上以及在理论的进一步发展上都具有重大的意义.

为了使这一方法更形系统化，复积分理论的创始人 Cauchy 提出了一个简单的形式体系，称为留数计算法. 从本书的角度来看，留数理论主要是第 4 节中所证明的一些结果在某些特殊简单场合下的应用.

5.1 留数定理

首先，我们按照第 4 节的一般性定理回顾一下早先介绍的一些结果. 很明显，凡是可作为圆盘中 Cauchy 定理的推论的所有结果对于一切包含同调于 0 的闭链的任意域都保持有效. 举一个典型的例子来说，我们可将 Cauchy 积分公式表达成如下形式：

如果 $f(z)$ 在域 Ω 内解析，那么对于每一个在 Ω 内同调于 0 的闭链 γ，必有

$$n(\gamma, a)f(a)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(z)dz}{z-a}.$$

这一定理的证明是定理 6 的证明的重复. 这里应当指出，在有可去奇点的情形，当然用不着再给定理 15 作另外的证明. 实际上，我们在讨论局部性态时已经证明所有可去奇点都可不予理会.

现在我们来讨论一个在域 Ω 内除了若干孤立奇点外到处解析的函数 $f(z)$. 首先，假设函数只有有穷个奇点，记为 a_1, a_2, $\cdots$,

a_n. 弃去点 a_j 后所成的域记为 Ω'.

对于每一 a_j, 存在一 $\delta_j>0$, 使得双连通域 $0<|z-a_j|<\delta_j$ 包含于 Ω' 之中. 以 a_j 为圆心, 作一半径 $<\delta_j$ 的圆 C_j, 并令 $f(z)$ 的对应周期为

$$P_j=\int_{C_j} f(z)dz. \tag{46}$$

特殊的函数 $1/(z-a_j)$ 的周期为 $2\pi i$. 因此, 如令 $R_j=P_j/2\pi i$, 则函数

$$f(z)-\frac{R_j}{z-a_j}$$

的周期等于零. 导致这一结果的常数 R_j 称为 $f(z)$ 在点 a_j 的留数. 定义如下:

定义 3 设 a 是函数 $f(z)$ 的孤立奇点, R 是一复数, 如果函数 $f(z)-\dfrac{R}{z-a}$ 是环域 $0<|z-a|<\delta$ 内某一单值解析函数的导数, 这确定的复数 R 就称为函数 $f(z)$ 在孤立奇点 a 上的留数.

有时也用更为明显的记法:

$$R=\mathrm{Res}_{z=a}f(z).$$

设 γ 为 Ω' 内的一闭链, γ 关于 Ω 同调于 0. 则 γ 必满足关于 Ω' 的同调关系

$$\gamma\sim\sum_i n(\gamma,\ a_j)C_j;$$

实际上, 很容易证明点 a_j 以及 Ω 外部的所有的点关于两闭链是同次的. 根据同调关系, 应用(46)式的记法, 得

$$\int_\gamma f\,dz=\sum_j n(\gamma,\ a_j)P_j,$$

而由于 $P_j=2\pi i\cdot R_j$, 故最后得

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f\,dz=\sum_j n(\gamma,\ a_j)R_j.$$

这就是留数定理, 不过在上面我们作了函数只有有穷个奇点的限制性假设. 在一般情形, 我们只要证明除了在有穷个点 a_j 之外, 到处有 $n(\gamma,\ a_j)=0$, 其余的证明与上面的都一样. 这一断言

可以根据惯用的理由来确立. 使得 $n(\gamma, a)=0$ 的所有点 a 的集合是一开集, 包含了一个大圆外部的所有点. 因此其余集是一紧致集, 所以它不能包含多于有穷个孤立点 a_j. 这说明 $n(\gamma, a_j)\neq 0$ 只对有穷个奇点成立. 从而有:

定理 17 设 $f(z)$ 在域 Ω 内除了孤立奇点 a_j 之外到处解析, 则对于任一在 Ω 内同调于 0 而不通过 a_j 中任一点的闭链 γ, 必有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)dz=\sum_j n(\gamma, a_j)\operatorname{Res}_{z=a_j} f(z). \qquad (47)$$

在应用中, 常遇的情形是 $n(\gamma, a_j)=0$ 或 $n(\gamma, a_j)=1$. 于是

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)dz=\sum_j \operatorname{Res}_{z=a_j} f(z),$$

式中的和是对 γ 所围的全部奇点来求的.

如果我们没有一个简单的方法来确定留数, 那么留数定理的价值就不大. 对于本性奇点来说, 具有任何实用价值的方法是没有的, 因此, 在有本性奇点的场合, 留数定理很少应用. 至于极点的情形就完全不同. 考察展开式

$$f(z)=B_h(z-a)^{-h}+\cdots+B_1(z-a)^{-1}+\varphi(z),$$

可知留数就等于系数 B_1. 事实上, 当略去项 $B_1(z-a)^{-1}$ 时, 余下的显然是一导数. 因为极点的奇部常是已知的, 或者是很容易求得的, 故可得一极为简单的求留数的方法.

对于单极来说, 方法更比较直接, 因为这时的留数就等于函数 $(z-a)f(z)$ 在 $z=a$ 处的值. 例如, 让我们来求函数

$$\frac{e^z}{(z-a)(z-b)}$$

在极点 a 及 $b\neq a$ 上的留数. 显然, 在 a 上的留数等于 $e^a/(a-b)$, 而在 b 上的留数则为 $e^b/(b-a)$. 如 $b=a$, 则情形稍较复杂. 应先用 Taylor 定理将 e^z 展开为

$$e^z=e^a+e^a(z-a)+f_2(z)(z-a)^2.$$

除以 $(z-a)^2$, 于是得 $e^z/(z-a)^2$ 在 $z=a$ 上的留数为 e^a.

注意: 在按照较为古典的方法引进 Cauchy 定理, 积分公式和留数定理时, 并不提到同调性, 也不会用到指示数的概念. 在古典

方法中，定理中的曲线γ假定为Ω的一个子域的全部边界，其取向的选定是使子域位于Ω的左边．在严格的著作中，要花费很大的力量来证明这些直观概念具有精确意义．现在这一方法的主要目的是有必要腾出时间和注意力来研究主题以外更为精致的问题．

从我们所用的一般观点来看，我们仍然可以，而且实际上也不难脱离古典的情形．这只须采用下面的定义：

定义 4 一闭链γ称为域Ω的围线，当且仅当对于所有的点$a\in\Omega$，$n(\gamma, a)$有定义且等于1，而对于所有不在Ω内的点a，$n(\gamma, a)$或者没有定义，或者等于0．

如果γ是Ω的围线，且如$\Omega+\gamma$包含于一较大的域Ω'中，则γ显然关于Ω'同调于0．因此得到定理15及17的如下推论：

如果γ是Ω的围线，并设$f(z)$在集$\Omega+\gamma$上解析，则

$$\int_\gamma f(z)dz=0,$$

而且对于所有的$z\in\Omega$，有

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}.$$

如果$f(z)$在$\Omega+\gamma$上除了Ω中的孤立奇点外到处解析，则

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)dz=\sum_j \mathrm{Res}_{z=a_j} f(z),$$

式中关于所有奇点$a_j\in\Omega$取和．

作为Ω的围线的闭链γ，必须包含集论意义下Ω的边界．事实上，如z_0位于Ω的边界上，则z_0的每一邻域必同时包含有属于Ω的点及不属于Ω的点．如果这样一个邻域中没有γ上的点，那么$n(\gamma, z)$将在邻域中有定义而等于常数．这与定义相矛盾，因此，z_0的每一邻域必与γ相交；由于γ是闭集，故z_0必在γ上．

上面叙述的逆不成立，因为γ上的一点可以有一个不与Ω相交的邻域．正常的说，应试择γ，使它与Ω的边界完全重合，但对于Cauchy定理及有关研究，这一假设是不需要的．

5.2 幅角原理

Cauchy 积分公式可以看作是留数定理的特例. 事实上, 函数 $f(z)/(z-a)$ 在 $z=a$ 处具有一单极, 其留数为 $f(a)$, 应用公式(47), 即得积分公式.

在定理 10 的证明中有留数定理的另一应用, 应用这一定理可确定一解析函数的零点个数. 对于一个 h 阶零点, 可令

$$f(z)=(z-a)^h f_h(z),$$

且 $f_h(a)\neq 0$, 于是得

$$f'(z)=h(z-a)^{h-1}f_h(z)+(z-a)^h f'_h(z).$$

因此, $f'(z)/f(z)=h/(z-a)+f'_h(z)/f_h(z)$, 故知 f'/f 具有一单极, 其上的留数为 h. 在公式(32)中, 这一留数要用若干项的对应的重数来计算.

现在我们可以把定理 10 推广到半纯函数的情形. 如 f 具有一 h 阶极点, 则用上面同样的计算, 以 $-h$ 代 h, 得 f'/f 的留数 $-h$. 于是得如下定理:

定理 18 如果 $f(z)$ 是 Ω 内的半纯函数, 具有零点 a_j, 极点 b_k, 则对于每一在 Ω 内同调于 0 而不通过任一零点或极点的闭链 γ, 必有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz=\sum_j n(\gamma, a_j)-\sum_k n(\gamma, b_k). \tag{48}$$

这里, 重零点及重极点应按其阶数重复计数; (48)中的和是有限的.

定理 18 常称为幅角原理. 这是因为 (48) 式的左边可以解释为 $n(\Gamma, 0)$而得名, 这里 Γ 是闭链 γ 的象闭链. 若 Γ 位于一个不包含原点的圆盘中, 则 $n(\Gamma, 0)=0$. 这就是下面的系的根据, 这一系常称为 Rouché 定理.

系 设 γ 在 Ω 内同调于 0, 对于不在 γ 上的任一点 z, 满足关系 $n(\gamma, z)=0$ 或 $=1$. 设 $f(z)$ 及 $g(z)$ 在 Ω 内解析, 并在 γ 上满足不等式

$$|f(z)-g(z)|<|f(z)|,$$

则 $f(z)$ 及 $g(z)$ 在 γ 内具有相同数目的零点.

这假设条件意味着 $f(z)$ 及 $g(z)$ 在 γ 上没有零点. 又, 它们在 γ 上满足不等式

$$\left|\frac{g(z)}{f(z)}-1\right|<1.$$

由此可知 $F(z)=g(z)/f(z)$ 在 γ 上的值包含于以 1 为圆心 1 为半径的开圆盘内. 对 $F(z)$ 应用定理 18, 得 $n(\Gamma, 0)=0$, 于是定理得证.

Rouché 定理的一个典型应用如下: 设我们要求函数 $f(z)$ 在圆盘 $|z|\leqslant R$ 内的零点数. 应用 Taylor 定理, 有

$$f(z)=P_{n-1}(z)+z^n f_n(z),$$

其中 P_{n-1} 是一个 $n-1$ 次多项式. 对于适当地选择的 n, 可以证明不等式 $R^n|f_n(z)|<|P_{n-1}(z)|$ 在 $|z|=R$ 上能够成立. 于是 $f(z)$ 在 $|z|\leqslant R$ 内的零点数将和 $P_{n-1}(z)$ 的零点数相同, 而这一零点数就可以用多项式方程 $P_{n-1}(z)=0$ 的近似解来确定.

定理 18 可按如下方式推广: 如 $g(z)$ 在 Ω 内解析, 则 $g(z)\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ 在一个 h 阶零点 a 上的留数为 $hg(a)$, 在一个极点上的留数为 $-hg(a)$. 于是得到公式:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma g(z)\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz=\sum_j n(\gamma, a_j)g(a_j)-\sum_k n(\gamma, b_k)g(b_k). \tag{49}$$

这一结果在研究反函数时很重要. 使用定理 11 的记法, 我们知道方程 $f(z)=w$, $|w-w_0|<\delta$ 在圆盘 $|z-z_0|<\varepsilon$ 内具有 n 个根 $z_j(w)$. 应用公式(49), 令 $g(z)=z$, 则得

$$\sum_{j=1}^n z_j(w)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=\varepsilon}\frac{f'(z)}{f(z)-w}\,z\,dz. \tag{50}$$

如 $n=1$, 则得反函数 $f^{-1}(w)$ 的显表示式为

$$f^{-1}(w)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=\varepsilon}\frac{f'(z)}{f(z)-w}\,z\,dz.$$

如对 $g(z)=z^m$ 应用公式(49)时，则方程(50)变为

$$\sum_{j=1}^{n} z_j(w)^m=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=\varepsilon}\frac{f'(z)}{f(z)-w}\,z^m\,dz.$$

不难证明上式的右边在 $|w-w_0|<\delta$ 内是 w 的解析函数．由此可知根 $z_j(w)$ 的乘幂的和都是 w 的单值解析函数．但是大家知道初等对称函数都可表为乘幂的和的多项式，因此它们都是解析的，于是知道 $z_j(w)$ 是一个多项式方程

$$z^n+a_1(w)z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}(w)z+a_n(w)=0$$

的根．这一方程的系数都是 $|w-w_0|<\delta$ 中的 w 的解析函数．

习　题

1．方程 $z^7-2z^5+6z^3-z+1=0$ 在圆盘 $|z|<1$ 中有几个根？［提示：注意当 $|z|=1$ 时最大的项并应用 Rouché 定理．］

2．方程 $z^4-6z+3=0$ 有多少个模在 1 与 2 之间的根？

3．方程 $z^4+8z^3+3z^2+8z+3=0$ 在右半平面内有几个根？［提示：作虚轴的象，再对一个大的半圆盘应用幅角原理．］

5.3　定积分的计算

留数定理给定积分的计值提供了一个极为有效的工具．这一方法在不可能明显地求得不定积分的情形下尤为重要，即使普通微积分方法可以使用，但应用留数通常要省力得多．复积分的计算显然相当于两个定积分的计算，但是，有了留数计算，复积分较之实积分反而更加方便．

不过，这里还有某些重大的限制，而且这一方法也远不是没有缺点的．首先，被积函数必须是解析的，但这还不是十分重大的限制，因为在通常情况下求积的都是初等函数，它们都可以延拓到复数域．更大的限制是复积分的方法只适用于积分路线是闭曲线的情形，而实积分则总是在区间上计算的．因此，必须应用特殊的方法，借以把问题转化为沿闭曲线的积分．可以采用的方法很多，但

它们都只能在比较特殊的场合下应用．下面我们将以典型的例子来介绍这些方法，不过，应当声明，对这些方法即使精通熟练，也不能保证一定成功．

1．形如下式的积分：

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta,\ \sin\theta)d\theta, \tag{51}$$

其中被积函数是 $\cos\theta$ 及 $\sin\theta$ 的有理函数，可以很容易地用留数来计值．当然，这些积分也可以用普通积分法来计算，但一般都很费力．作代换 $z=e^{i\theta}$，就可将(51)式变为如下形式的线积分：

$$-i\int_{|z|=1} R\left[\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right),\ \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right]\frac{dz}{z}.$$

现在只须确定被积函数在单位圆内部各极点上对应的留数即可得积分的值．

让我们来计算

$$\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{a+\cos\theta},\quad a>1$$

的值作为例子．这一积分的积分区间是$(0,\ \pi)$，但因 $\cos\theta$ 在区间 $(0,\ \pi)$ 及 $(\pi,\ 2\pi)$ 上所取的值相同，故知由 0 至 π 的积分等于由 0 至 2π 的积分的一半．据此可知所给积分等于

$$-i\int_{|z|=1}\frac{dz}{z^2+2az+1}.$$

被积函数的分母可分解为$(z-\alpha)(z-\beta)$，其中 $\alpha=-a+\sqrt{a^2-1}$，$\beta=-a-\sqrt{a^2-1}$．显然 $|\alpha|<1$，$|\beta|>1$，而在 α 上的留数为 $1/(\alpha-\beta)$．故积分的值为 $\pi/\sqrt{a^2-1}$．

2．形如下式的积分：

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)dx,$$

要这一积分收敛，必须而且只须有理函数 $R(x)$ 中的分母的次数至少高于分子的次数二次，并且在实轴上没有极点．标准的方法是将复函数 $R(z)$ 沿着一条由直线段 $(-\rho,\ \rho)$ 及上半平面中由 ρ 至 $-\rho$ 的半圆组成的闭曲线进行积分．若 ρ 足够大，这一曲线将包

围上半平面中的所有极点，对应的积分就等于 $2\pi i$ 乘以上半平面上的留数之和．当 $\rho\to\infty$ 时，估计表明，沿着半圆的积分趋向于零，因此得

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)dx = 2\pi i \sum_{y>0} \operatorname{Res} R(z).$$

3．同样的方法可应用于如下形式的积分：

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)e^{ix}\,dx, \tag{52}$$

它的实部和虚部确定了下面很重要的积分：

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\cos x\,dx,\quad \int_{-\infty}^{\infty} R(x)\sin x\,dx. \tag{53}$$

由于 $|e^{iz}|=e^{-y}$ 在上半平面上是有界的，故知只要有理函数 $R(z)$ 在无穷远点具有一个阶数至少等于 2 的零点，则沿着半圆的积分仍然是趋于 0 的．于是得

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)e^{ix}dx = 2\pi i \sum_{y>0} \operatorname{Res} R(z)e^{iz}.$$

当 ∞ 是 $R(z)$ 的单零点时，同样的结果也成立．但在这种情况下应用半圆就不方便．因为第一，估计沿着半圆的积分不是那么容易；第二，即使这一估值可以作成，我们只是证明了区间 $(-\rho, \rho)$ 上的积分

$$\int_{-\rho}^{\rho} R(x)e^{ix}\,dx$$

当 $\rho\to\infty$ 时具有所需的极限．事实上，我们当然是要证明

$$\int_{-X_1}^{X_2} R(x)e^{ix}\,dx$$

当 X_1 及 X_2 独立地趋向于 ∞ 时具有一极限．在前面的例子中并不发生这样的问题，因为事先已经断定积分是收敛的．

为了证明这一点，可沿着一矩形的周界进行积分，矩形的顶点为 X_2，X_2+iY，$-X_1+iY$，$-X_1$，此处 $Y>0$．只要 X_1、X_2 及 Y 足够大，则这一矩形包含上半平面上的所有极点．在这一假设下 $|zR(z)|$ 是有界的．因此，沿着右面的垂直边的积分除了常数因子外，将小于

$$\int_0^y e^{-y}\frac{dy}{|z|}<\frac{1}{X_2}\int_0^y e^{-y}dy.$$

最后一个积分可以直接算出，知其值<1. 因此，沿着右面的垂直边的积分小于一常数乘以 $1/X_2$, 对于左面的垂直边也可得相应的结果. 沿着上面水平边的积分显然小于 $e^{-Y}(X_1+X_2)/Y$ 乘以一常数. 对于固定的 X_1 及 X_2, 当 $Y\to\infty$ 时,它趋向于零，于是得

$$\left|\int_{-X_1}^{X_1}R(x)e^{ix}dx-2\pi i\sum_{y>0}\operatorname{Res}R(z)e^{iz}\right|<A\left(\frac{1}{X_1}+\frac{1}{X_2}\right),$$

式中 A 代表一常数. 这一不等式证明,在 $R(\infty)=0$ 的情形下,

$$\int_{-\infty}^{\infty}R(x)e^{ix}dx=2\pi i\sum_{y>0}\operatorname{Res}R(z)e^{iz}.$$

在讨论中，我们曾经假设 $R(z)$在实轴上不具有极点，因为否则,积分(52)就没有意义. 不过,如果 $R(z)$具有与 $\sin x$ 或 $\cos x$ 零点相重合的单极，则 (53) 式中可有一个积分存在. 举例来说，设 $R(z)$以 $z=0$ 为一单极. 则(53)的第二个积分具有意义,应予计值.

应用与前面同样的方法,但所用的积分路线应避过原点,这可在下半平面上作一个小的半圆，其半径为 δ, 如图 4–12 所示. 容易看出，只要 X_1、X_2及 Y 足够大而 δ 足够小，则这一闭曲线将包含上半平面上的所有极点及原点处的极点，除此之外，别无其他. 设 0 上的留数为 B, 因此可令 $R(z)e^{iz}=B/z+R_0(z)$, 其中 $R_0(z)$在原点解析.

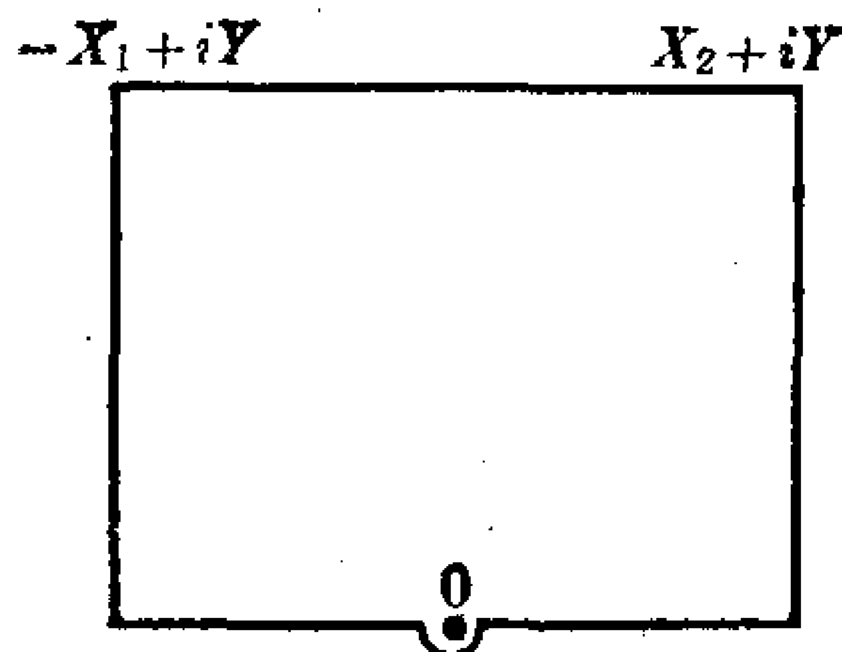


图 4–12

第一项沿半圆的积分等于 πiB, 而第二项的积分则随 δ 同时趋于 0. 从此得

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{-\infty}^{-\delta}+\int_{\delta}^{\infty}R(x)e^{ix}dx=2\pi i\left[\sum_{y>0}\operatorname{Res}R(z)e^{iz}+\frac{1}{2}B\right].$$

左边的极限称为积分的 Cauchy 主值；虽在积分本身不具有意义的时候，它也存在. 在上式的右边，包含有 0 上留数的一半，这就好象说,这个极点的一半是在上半平面上.

对于在实轴上具有若干个极点的一般情形，我们有

$$\text{pr. v.}\int_{-\infty}^{\infty} R(x)e^{ix}\,dx=2\pi i\sum_{y>0}\operatorname{Res} R(z)e^{iz}+\pi i\sum_{y=0}\operatorname{Res} R(z)e^{iz},$$

式中的记法是一望而知的．主要假设是：所有位于实轴上的极点都是单极点，而且必须设 $R(\infty)=0$.

作为最简单的例子，我们有

$$\text{pr. v.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x}\,dx=\pi i.$$

将实部与虚部分开，可知上式的实部是很平凡的，因为被积式是奇函数．在虚部中不必取主值，而由于被积式是偶函数，故

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx=\frac{\pi}{2}.$$

包含有因子 $\cos^n x$ 或 $\sin^n x$ 的积分可用同样方法计值．事实上，这些因子可写成 $\cos mx$ 及 $\sin mx$ 的线性组合，对应的积分可通过变数变换而转化为(52)的形式：

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)e^{imx}\,dx=\frac{1}{m}\int_{-\infty}^{\infty} R\left(\frac{x}{m}\right)e^{ix}\,dx.$$

4．下面考虑形如下式的积分：

$$\int_{0}^{\infty} x^{\alpha}R(x)\,dx,$$

其中指数 α 是实数，可假设这一指数的值位于区间 $0<\alpha<1$ 中．为了保证收敛，$R(z)$ 在 ∞ 处应具有一个阶数至少为 2 的零点，而在原点处至多只能有一个单极点．

这种积分的特点是 $z^{\alpha}R(z)$ 并不为单值的．但这正是对它可求 0 至 ∞ 的积分的原因．

最简单的方法是先作代换 $x=t^2$，将积分变换成如下形式：

$$2\int_{0}^{\infty} t^{2\alpha+1}R(t^2)\,dt.$$

从函数 $z^{2\alpha}$ 中可选定幅角位于 $-\pi\alpha$ 及 $3\pi\alpha$ 之间的一支；它在弃去负虚轴所得的域内有定义且解析．只要我们能避过负虚轴，我们就可以对函数 $z^{2\alpha+1}R(z^2)$ 应用留数定理．我们所用的闭曲线由下列各部组成：正实轴和负实轴上的两个线段，上半平面中的两个半

圆，一个很大，一个很小，如图 4-13 所示. 在我们的假设条件下，不难证明沿着半圆的积分趋于零. 因此应用留数定理，得到积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} z^{2\alpha+1}R(z^2)dz=\int_0^{\infty}(z^{2\alpha+1}+(-z)^{2\alpha+1})R(z^2)dz$$

的值. 但$(-z)^{2\alpha}=e^{2\pi i\alpha}z^{2\alpha}$，故积分等于

$$(1-e^{2\pi i\alpha})\int_0^{\infty} z^{2\alpha+1}R(z^2)dz.$$

由于前面的因子$\neq 0$，故最后确定所求积分的值是完全可以办到的.

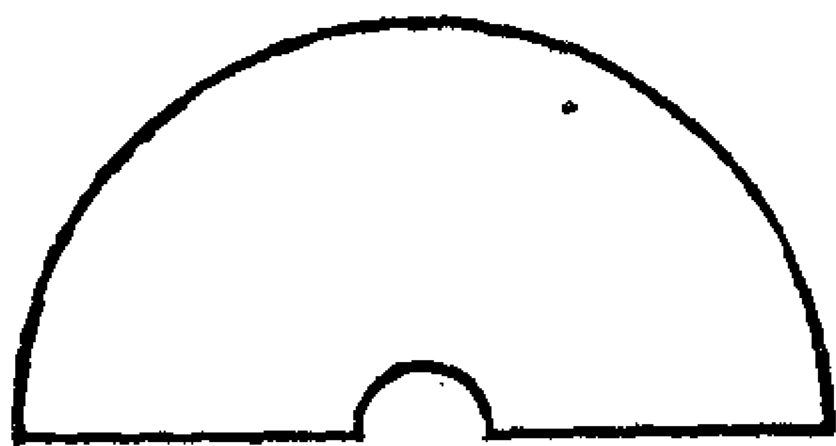


图 4-13

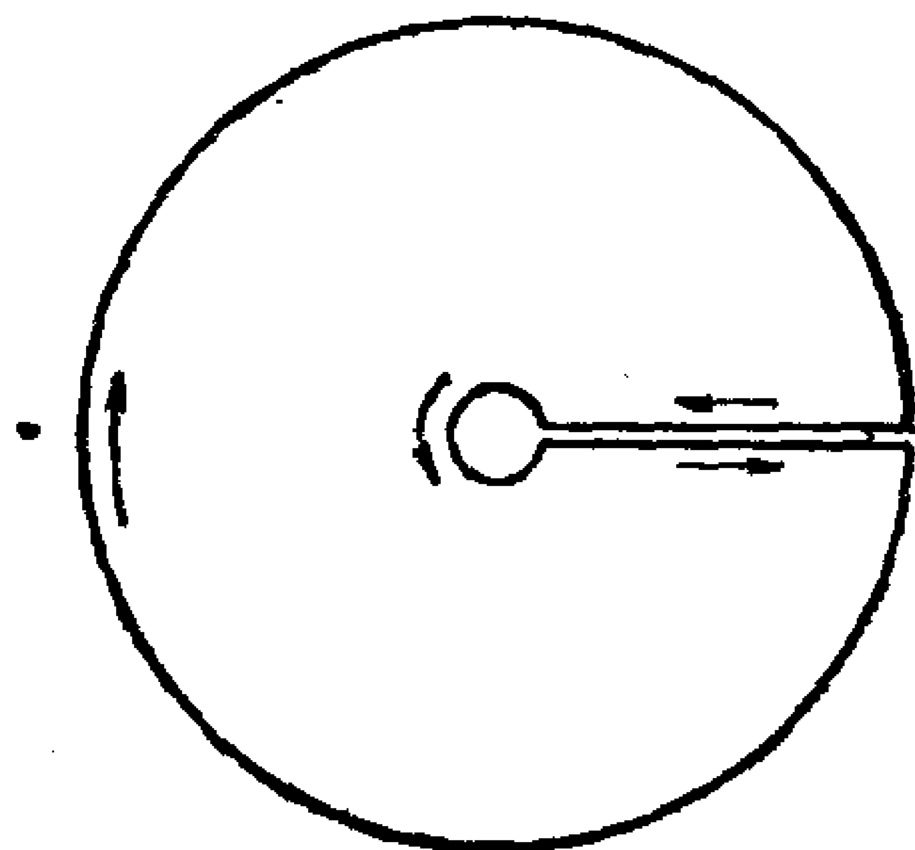


图 4-14

要计算积分，需要确定$z^{2\alpha+1}R(z^2)$在上半平面上的留数. 这与$z^{\alpha}R(z)$在整个平面上的留数相同. 在实用上，可不必先作任何代换，直接沿图 4-14 所示的闭曲线求函数$z^{\alpha}R(z)$的积分. 这样，就需应用z^{α}的一个分支，其幅角位于 0 及$2\pi\alpha$之间. 这一方法需作一定的验证，因为它与留数定理的假设并不一致. 验证的方法是很普通的，在此不赘述了.

5. 我们提出下列特殊积分的计算作为最后一个例子，即

$$\int_0^{\pi}\log\sin\theta\, d\theta.$$

考察函数$1-e^{2iz}=-2ie^{iz}\sin z$. 从表示式$1-e^{2iz}=1-e^{-2y}(\cos 2x+i\sin 2x)$可知，这一函数只在$x=n\pi$, $y\leqslant 0$时是负实数. 因此，函数$\log(1-e^{2iz})$的主支在弃去这些半直线后所成的域内是单值而解析的. 对顶点为 0, π, $\pi+iY$, iY 的矩形应用 Cauchy 定理；但应避开点 0 及π，为此可在这两点处作半径为δ的四分之一小圆.

由于周期性，沿垂直边的积分互相抵消．当 $Y\to\infty$ 时，沿上面水平边的积分趋于零．而当 $\delta\to 0$ 时，沿四分之一小圆的积分也趋于零．实际上，由于对数的虚部是有界的，所以只要考虑其实部就可以了．从 $z\to 0$ 时 $|1-e^{2iz}|/|z|\to 2$ 可见 $\log|1-e^{2iz}|$ 象 $\log\delta$ 一样趋于无穷，又因 $\delta\log\delta\to 0$，故沿着原点近旁四分之一小圆的积分趋于零．

在顶点 π 附近也可应用同样的证明，于是得

$$\int_0^\pi \log(-2ie^{ix}\sin x)\,dx=0.$$

如取 $\log e^{ix}=ix$，虚部位于 0 与 π 之间．因此，为了求得虚部在 $-\pi$ 与 π 之间的主支，必须令 $\log(-i)=-\pi i/2$．于是方程可写成如下形式：

$$\pi\log 2-\left(\frac{\pi^2}{2}\right)i+\int_0^\pi \log\sin x\,dx+\left(\frac{\pi^2}{2}\right)i=0,$$

从而得

$$\int_0^\pi \log\sin x\,dx=-\pi\log 2.$$

习　题

1．求下列函数的极点与留数：

(a) $\dfrac{1}{z^2+5z+6}$，　(b) $\dfrac{1}{(z^2-1)^2}$，　(c) $\dfrac{1}{\sin z}$，

(d) $\cot z$，　(e) $\dfrac{1}{\sin^2 z}$，　(f) $\dfrac{1}{z^m(1-z)^n}$ (m、n 为正整数)．

2．试证明 5.3 节例 3 中的积分可以扩展为沿一直角等边三角形的积分．

3．试用留数方法计算下列积分：

(a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{a+\sin^2 x}$，$|a|>1$，　(b) $\displaystyle\int_0^\infty\frac{x^2\,dx}{x^4+5x^2+6}$，

(c) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty\frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9}\,dx$，　(d) $\displaystyle\int_0^\infty\frac{x^2\,dx}{(x^2+a^2)^3}$，$a$ 为实数，

(e) $\displaystyle\int_0^\infty\frac{\cos x}{x^2+a^2}\,dx$，$a$ 为实数，　(f) $\displaystyle\int_0^\infty\frac{x\sin x}{x^2+a^2}\,dx$，$a$ 为实数，

(g) $\int_0^\infty \frac{x^{1/3}}{1+x^2}dx$, (h) $\int_0^\infty (1+x^2)^{-1}\log x\,dx$,

(i) $\int_0^\infty \log(1+x^2)\frac{dx}{x^{1+\alpha}}$ $(0<\alpha<2)$. (试作分部积分.)

4. 计算
$$\int_{|z|=\rho}\frac{|dz|}{|z-a|^2},\ |a|\neq\rho.$$

[提示: 用 $z\bar{z}=\rho^2$ 把积分变成一个有理函数的线积分.]

*5. 有时可用复积分来计算面积分. 作为说明, 试证: 如果 $f(z)$ 当 $|z|<1$ 时解析且有界,又若 $|\zeta|<1$, 则

$$f(\zeta)=\frac{1}{\pi}\iint_{|z|<1}\frac{f(z)dxdy}{(1-\bar{z}\zeta)^2}.$$

注意: 这称为 Bergman 核公式. 为证明这个公式, 将面积分表成极坐标,然后把内层的积分变换成一个线积分,可用留数计算.

6 调和函数

一个解析函数的实部和虚部是共轭的调和函数. 因此, 有关解析函数的所有定理也是一对共轭调和函数的定理. 不过, 调和函数有它本身的重要性, 而且它们的研究常不能用复分析方法来简化. 这一点,在共轭调和函数不是单值函数时尤为突出.

在这一节里, 我们把有关调和函数与 Cauchy 定理紧密联系的某些事实汇集在一起. 至于调和函数更精致的性质, 则待下一章介绍.

6.1 定义和基本性质

在域 Ω 内定义且单值的实值函数 $u(z)$ 或 $u(x, y)$ 称为在 Ω 内**调和**,或称为**位函数**, 如果它本身及其一阶、二阶偏导数在 Ω 中连续,并且满足 Laplace **方程**

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0. \tag{54}$$

后面我们将会看到,这里的正则性条件是可以减弱的,但这一点并不重要.

两个调和函数的和以及一个调和函数的常数倍数仍然是调和函数，这可由 Laplace 方程的线性性质推出．最简单的调和函数是线性函数 $ax+by$．用极坐标 (r, θ)，方程(54)变为

$$r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=0❶.$$

这表明 $\log r$ 是一调和函数，而且表明，任一只依赖于 r 的调和函数必具有 $a\log r+b$ 的形式．幅角 θ，只要它能唯一地定义，也是调和的．

如 u 在 Ω 内调和，则

$$f(z)=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y} \tag{55}$$

必解析，因为令 $U=\frac{\partial u}{\partial x}$，$V=-\frac{\partial u}{\partial y}$，我们得到

$$\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial V}{\partial y},$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=-\frac{\partial V}{\partial x}.$$

应当记住，这是从调和函数过渡到解析函数的最自然的方法．

从(55)可得微分

$$f\,dz=\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy\right)+i\left(-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy\right). \tag{56}$$

在上式中，实部是 u 的微分，

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy.$$

如 u 有一共轭调和函数 v，则虚部可写成如下形式：

$$dv=\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy=-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy.$$

不过，一般并没有单值的共轭函数，因此最好不用记号 dv．代替它的有

$$^*du=-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy,$$

---

❶ 方程的这一形式对 $r=0$ 不适用．

并称 $^*du$ 为 du 的共轭微分. 从(56)得到

$$f\,dz = du + i\,{}^*du. \tag{57}$$

根据 Cauchy 定理可知, $f\,dz$ 沿着在 Ω 内同调于零的任一闭链的积分等于零. 另一方面, 正合微分 du 沿任何闭链的积分都等于零. 故从(57)可知, 对于在 Ω 内同调于零的所有闭链 γ,

$$\int_\gamma {}^*du = \int_\gamma -\frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy = 0. \tag{58}$$

(58)式中的积分有一重要的解释, 应当在此提一提. 令 γ 为一正则曲线, 其方程为 $z=z(t)$, 切线的方向由角 $\alpha=\arg z'(t)$ 确定, 我们可令 $dx=|dz|\cos\alpha$, $dy=|dz|\sin\alpha$. 指向切线右方的法线的方向为 $\beta=\alpha-\pi/2$, 因此 $\cos\alpha=-\sin\beta$, $\sin\alpha=\cos\beta$. 表达式

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\beta$$

是 u 的一个方向导数, 就是关于曲线 γ 的右法向导数. 于是得到 $^*du=(\partial u/\partial n)|dz|$, 而(58)式可写成如下形式:

$$\int_\gamma \frac{\partial u}{\partial n}|dz| = 0. \tag{59}$$

这是古典的记法. 这一记法的主要好处是 $\partial u/\partial n$ 实际表出了垂直于 γ 的方向内的变化率. 例如, 如 γ 为一取正向的圆, $|z|=r$, 则 $\partial u/\partial n$ 就可用偏导数 $\partial u/\partial r$ 来代替. 这一记法的缺点就是(59)式已不是一普通的线积分, 而是一个关于弧长的积分. 由于这一原因, 古典记法在同调论中不很适用, 还是应用记法 $^*du$ 为好.

在一个单连通域内, $^*du$ 沿所有闭链的积分都等于零, 而 u 则具有一单值的共轭函数 v, 这一函数除了一个附加的常数外, 可以完全确定. 在多连通的情形, 共轭函数具有对应于同调基底上的闭链 γ_i 的周期:

$$\int_{\gamma_i} {}^*du = \int_{\gamma_i} \frac{\partial u}{\partial n}|dz|.$$

对于一个对调和函数, 公式(58)有一重要的推广. 设 u_1 及 u_2 为 Ω 内的调和函数, 可以断言, 对于在 Ω 内同调于零的每一闭链 γ, 必有

$$\int_{\gamma_1} u_1{}^* du_2 - u_2{}^* du_1 = 0. \tag{60}$$

根据第 4.6 节的定理 16, 我们只要对 $\gamma=\partial R$ 证明公式 (60) 就够了, 此处 R 为 Ω 中的一个矩形. 在 R 中, u_1 及 u_2 具有单值的共轭函数 v_1 及 v_2, 因此可写作

$$u_1{}^* du_2 - u_2{}^* du_1 = u_1 dv_2 - u_2 dv_1 = u_1 dv_2 + v_1 du_2 - d(u_2 v_1),$$

此处, $d(u_2 v_1)$ 为一正合微分, 而 $u_1 dv_2 + v_1 du_2$ 是

$$(u_1 + iv_1)(du_2 + i\,dv_2)$$

的虚部. 最后一微分可写成 $F_1 f_2 dz$ 的形式, 其中 $F_1(z)$ 及 $f_2(z)$ 都在 R 上解析. 根据 Cauchy 定理, $F_1 f_2 dz$ 的积分等于零, 因此其虚部的积分也等于零. 故知(60)式对 $\gamma=\partial R$ 成立, 这就证明了下面的定理:

定理 19 设 u_1 及 u_2 都在域 Ω 内调和, 则对于在 Ω 内同调于零的任一闭链 γ, 必有

$$\int_{\gamma} u_1{}^* du_2 - u_2{}^* du_1 = 0. \tag{60}$$

如 $u_1=1$ 而 $u_2=u$, 则上式化成(58)式. 如用古典记法, (60)式可写成

$$\int_{\gamma}\left(u_1 \frac{\partial u_2}{\partial n} - u_2 \frac{\partial u_1}{\partial n}\right)|dz| = 0.$$

6.2 均值性质

现在我们来应用定理 19, 令 $u_1=\log r$, $u_2=u$, u 在 $|z|<\rho$ 中调和. 取有孔圆盘 $0<|z|<\rho$ 作为 Ω, 闭链 C_1-C_2 作为 γ, 此处 C_i 是一取正向的圆 $|z|=r_i<\rho$. 在圆 $|z|=r$ 上, 有

$$^*du = r(\partial u/\partial r)d\theta,$$

因此, 由(60)得

$$\log r_1 \int_{C_1} r_1 \frac{\partial u}{\partial r}\, d\theta - \int_{C_1} u\, d\theta = \log r_2 \int_{C_2} r_2 \frac{\partial u}{\partial r}\, d\theta - \int_{C_2} u\, d\theta.$$

换言之, 表达式

$$\int_{|z|=r} u\, d\theta - \log r \int_{|z|=r} r \frac{\partial u}{\partial r}\, d\theta$$

是一常数，这一点即使在所给的 u 只在一个环形域中调和时也正确. 同样，从(58)可知，如果 u 在一环形域中调和，则

$$\int_{|z|=r} r\frac{\partial u}{\partial r}\,d\theta$$

是一常数，而若 u 在整个圆盘内调和，则等于零. 合并上述结果，就得到：

定理 20 一个调和函数在同心圆 $|z|=r$ 上的算术平均是 $\log r$ 的一个线性函数，

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=r} u\,d\theta=\alpha\log r+\beta, \tag{61}$$

又如果 u 在一圆盘内为调和，则 $\alpha=0$，而 u 的算术平均是一常数.

在后一情形，根据连续性，$\beta=u(0)$，变换到一个新的原点后，得到

$$u(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_0+re^{i\theta})\,d\theta. \tag{62}$$

公式(62)显然也可直接从第 3.4 节中的解析函数的对应公式(34)中导出. 这就直接引出了调和函数的极值原理：

定理 21 一个不等于常数的调和函数在其定义域中既没有极大值，也没有极小值. 因此，在一闭有界集 E 上，其极大和极小值必在 E 的边界上取得.

这一定理的证明，和解析函数极值原理的证明相仿，在此不重复了. 它也可应用于极小值的考虑，因为，如 u 为调和函数，则 $-u$ 也必是调和函数. 在解析函数的情形，要作相应的处理就必须将极值原理应用于 $1/f(z)$，但这是不恰当的，除非 $f(z)\neq 0$. 注意，解析函数的极值原理可从调和函数的极值原理导出，只要将后者应用于 $\log|f(z)|$ 即可，这一函数在 $f(z)\neq 0$ 时是调和的.

习　题

1. 设 u 在 $0<|z|<\rho$ 中有界且调和，求证原点是 u 的可去奇点，这就是说，当 $u(0)$ 经适当定义以后，u 变成在 $|z|<\rho$ 中调和.

2. 设$f(z)$在圆环$r_1<|z|<r_2$中解析，并在闭圆环上连续. 当$|z|=r$时，以$M(r)$表$|f(z)|$的最大值，试证明

$$M(r)\leqslant M(r_1)^{\alpha}M(r_2)^{1-\alpha},$$

其中$\alpha=\log(r_2/r):\log(r_2/r_1)$ (Hadamard 三圆定理). 并讨论等号成立的情形. [提示：对$\log|f(z)|$和$\log|z|$的一个线性组合，应用极值原理.]

6.3 Poisson 公式

极值原理具有一个如下的重要推论：设$u(z)$在一个有界闭集E上连续，并在E的内部调和，则这一函数将由它在E的边界上的值唯一地确定. 实际上，如设u_1及u_2为两个具有同样边值的调和函数，则u_1-u_2将是边值为0的调和函数. 应用极值原理可知u_1-u_2应在E上恒等于零.

这里产生了当u的边值已经给定时，如何求出u的问题. 在这方面，我们将只对最简单的情形，即对一个闭的圆盘，给出问题的解.

公式(62)确定u在圆盘中心的值. 这正是我们所需要的，因为存在一个线性变换，它可把任何一点变到圆心. 为明确计，设$u(z)$在闭圆盘$|z|\leqslant R$中调和. 线性变换

$$z=S(\zeta)=\frac{R(R\zeta+a)}{R+\bar{a}\zeta}$$

将$|\zeta|\leqslant 1$映成$|z|\leqslant R$，以点$\zeta=0$与点$z=a$对应. 函数$u(S(\zeta))$在$|\zeta|\leqslant 1$中调和，根据(62)，得到

$$u(a)=\frac{1}{2\pi}\int_{|\zeta|=1}u(S(\zeta))\,d\arg\zeta.$$

从

$$\zeta=\frac{R(z-a)}{R^2-\bar{a}z}$$

计算

$$d\arg\zeta=-i\frac{d\zeta}{\zeta}=-i\left(\frac{1}{z-a}+\frac{\bar{a}}{R^2-\bar{a}z}\right)dz$$

$$=\left(\frac{z}{z-a}+\frac{\bar{a}z}{R^2-\bar{a}z}\right)d\theta,$$

代入 $R^2=z\bar{z}$，则最后一式中 $d\theta$ 的系数可改写为

$$\frac{z}{z-a}+\frac{\bar{a}}{\bar{z}-\bar{a}}=\frac{R^2-|a|^2}{|z-a|^2}$$

或
$$\frac{1}{2}\left(\frac{z+a}{z-a}+\frac{\bar{z}+\bar{a}}{\bar{z}-\bar{a}}\right)=\operatorname{Re}\frac{z+a}{z-a}.$$

于是得到 Poisson 公式的两种形式如下：

$$u(a)=\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=R}\frac{R^2-|a|^2}{|z-a|^2}u(z)d\theta$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=R}\operatorname{Re}\frac{z+a}{z-a}u(z)d\theta. \tag{63}$$

在极坐标系中，

$$u(re^{i\varphi})=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-r^2}{R^2-2rR\cos(\theta-\varphi)+r^2}u(Re^{i\theta})d\theta.$$

在导出 Poisson 公式的过程中，我们假设了 $u(z)$ 在闭圆盘中调和．但是，在较弱的条件：$u(z)$在开圆盘中调和，在闭圆盘中连续之下，结论仍是正确的．事实上，如果 $0<r<1$，则 $u(rz)$在闭圆盘中调和，于是得到

$$u(ra)=\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=R}\frac{R^2-|a|^2}{|z-a|^2}u(rz)d\theta.$$

现在我们需要做的是令 r 趋于 1．因为 $u(z)$ 在 $|z|\leqslant R$ 上一致连续，因此，对于 $|z|=R$，一致地有 $u(rz)\to u(z)$．故知(63)保持正确．

我们把这结果阐述成如下定理：

定理 22 假设 $u(z)$ 在 $|z|<R$ 内调和，在 $|z|\leqslant R$ 上连续．则对所有 $|a|<R$，恒有

$$u(a)=\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=R}\frac{R^2-|a|^2}{|z-a|^2}u(z)d\theta. \tag{64}$$

由这定理立即得到 u 的共轭函数的一个明显表达式．实际上，由公式(63)得

$$u(z)=\operatorname{Re}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=R}\frac{\zeta+z}{\zeta-z}u(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta}\right]. \tag{65}$$

方括号内的表达式当 $|z|<R$ 时是 z 的一个解析函数．由此推知

$u(z)$是

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=R}\frac{\zeta+z}{\zeta-z}u(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta}+iC \tag{66}$$

的实部，其中C是一个任意的实常数．这一公式称为Schwarz公式．

作为(64)的一个特殊情形，注意$u=1$给出

$$\int_{|z|=R}\frac{R^2-|z|^2}{|z-a|^2}d\theta=2\pi \tag{67}$$

对所有的$|a|<R$成立．

6.4 Schwarz 定理

定理22可用以将一个给定的调和函数通过它在一个圆周上的值来表达．但是公式(64)的右端当u在$|z|=R$上有定义时，只要是充分正规的，例如是逐段连续的，就有意义．象在(65)中一样，积分仍可写成一个解析函数的实部，因此它是一个调和函数．问题是：它在$|z|=R$上是否有边值$u(z)$？

有理由来澄清一下记号：取$R=1$，对于$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$中的任一逐段连续函数$U(\theta)$，定义

$$P_U(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{Re}\,\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}U(\theta)d\theta,$$

并称它为U的Poisson积分．注意：$P_U(z)$不仅是z的函数，而且还是函数U的函数；称它为一个泛函．如

$$P_{U+V}=P_U+P_V,$$

并对一个常数c，有

$$P_{cU}=cP_U,$$

成立，则称这一泛函是线性的．此外，$U\geqslant 0$就意味着$P_U(z)\geqslant 0$；由于这一性质，所以称P_U为正线性泛函．

从(67)可推得$P_c=c$．从这一性质，连同泛函的线性和正的特性，使我们得出结论：不等式$m\leqslant U\leqslant M$将导致$m\leqslant P_U\leqslant M$．

边值的问题是用下列基本定理来处理的，这定理是H. A. Schwarz首先证明的：

定理 23 只要函数 U 在 θ_0 处连续，则函数 $P_U(z)$ 在 $|z|<1$ 内调和，且

$$\lim_{z\to e^{i\theta_0}} P_U(z)=U(\theta_0). \tag{68}$$

我们已经指出，P_U 是调和的．为了研究边界性态，设 C_1 和 C_2 是单位圆上两段互余的弧，并以 U_1 表示在 C_1 上等于 U 而在 C_2 上等于零的函数，以 U_2 表示在 C_2 上等于 U 而在 C_1 上等于零的函数．显见 $P_U=P_{U_1}+P_{U_2}$.

由于 P_{U_1} 可以看作沿着 C_1 的一个线积分，故根据前面同样的理由，它除闭弧 C_1 之外处处调和．对于 $z\neq e^{i\theta}$，表达式

$$\mathrm{Re}\,\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}=\frac{1-|z|^2}{|e^{i\theta}-z|^2}$$

在 $|z|=1$ 上等于零．故知 P_{U_1} 在开弧 C_2 上等于零，又因它是连续的，故当 $z\to e^{i\theta}\in C_2$ 时，$P_{U_1}(z)\to 0$.

要证明 (68)，可设 $U(\theta_0)=0$，因为如果情形不如此，则只须以 $U-U(\theta_0)$ 代 U 即可．给定一个 $\varepsilon>0$，可以找到 C_1 和 C_2 使得 $e^{i\theta_0}$ 是 C_2 的一个内点，并对于 $e^{i\theta}\in C_2$，有 $|U(\theta)|<\varepsilon/2$．在这一条件下，对于所有的 θ，必有 $|U_2(\theta)|<\varepsilon/2$，因此，对于 $|z|<1$，就有 $|P_{U_2}(z)|<\varepsilon/2$．另一方面，由于 U_1 连续并在 $e^{i\theta_0}$ 处等于零，故存在一个 δ，只要 $|z-e^{i\theta_0}|<\delta$，便有 $|P_{U_1}(z)|<\varepsilon/2$．由此可知，只要 $|z|<1$，$|z-e^{i\theta_0}|<\delta$，就有 $|P_U(z)|\leqslant|P_{U_1}|+|P_{U_2}|<\varepsilon$，这就是所要证明的．

Poisson 公式有一个有趣的几何解释，也是 Schwarz 提出的．给定单位圆内部一个固定点 z，对每一 $e^{i\theta}$，确定点 $e^{i\theta^*}$，使 $e^{i\theta}$，z 与 $e^{i\theta^*}$ 在一直线上(图4-15)．经几何考察或通过直接计算，有

$$1-|z|^2=|e^{i\theta}-z|\,|e^{i\theta^*}-z|. \tag{69}$$

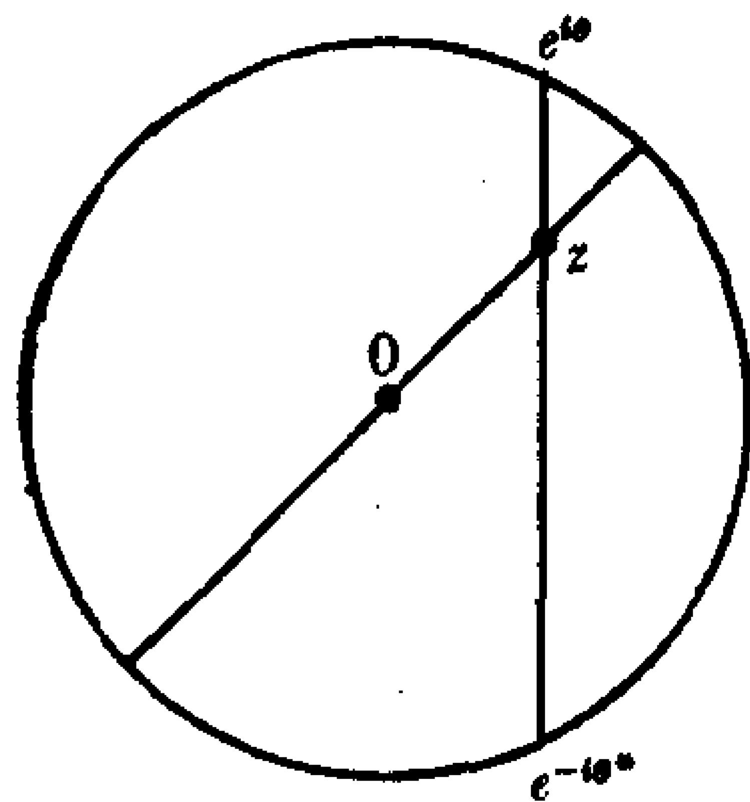


图 4-15

但 $(e^{i\theta}-z)/(e^{i\theta^*}-z)$ 是负的，故必有

$$1-|z|^2=-(e^{i\theta}-z)(e^{-i\theta^*}-\bar{z}).$$

把 θ^* 看作 θ 的函数进行求导．由于 z 是常数，故得

$$\frac{e^{i\theta}\,d\theta}{e^{i\theta}-z}=\frac{e^{-i\theta^*}\,d\theta^*}{e^{-i\theta^*}-\bar{z}},$$

取绝对值，得

$$\frac{d\theta^*}{d\theta}=\left|\frac{e^{i\theta^*}-z}{e^{i\theta}-z}\right|. \tag{70}$$

从(69)和(70)得

$$\frac{1-|z|^2}{|e^{i\theta}-z|^2}=\frac{d\theta^*}{d\theta}.$$

因此

$$P_U(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}U(\theta)\,d\theta^*=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}U(\theta^*)d\theta.$$

换言之，为求 $P_U(z)$，可将 $U(\theta)$ 的每一个值换为 z 对面的点上的值，并沿圆取平均值即可。

习 题

1. 设 $U(\xi)$ 对所有实的 ξ 是逐段连续而有界的，证明

$$P_U(z)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y}{(x-\xi)^2+y^2}U(\xi)d\xi$$

表示上半平面中的一个调和函数，在连续点有边值 $U(\xi)$（半平面的 Poisson 积分）.

2. 证明：在上半平面中调和而有界，在实轴上连续的函数可以表成一个 Poisson 积分（习题 1）.

注：无穷远点的出现增加了困难，因为我们不能直接对 $u-P_u$ 应用极值原理. 一个好的尝试是对 $\varepsilon>0$ 应用极值原理于 $u-P_u-\varepsilon y$，记住要令 ε 趋于零. 这几乎总是可行的，因为当 $y\to 0$ 时函数趋于 0，而当 $y\to\infty$ 时，函数趋于 $-\infty$，但当 $|x|\to\infty$ 时就不能控制. 试证明：若应用于 $u-P_u-\varepsilon\operatorname{Im}(\sqrt{iz})$，则推理可成功地作出.

3. 在习题 1 中，假设 U 在 0 有一个跳跃，例如 $U(+0)=0$, $U(-0)=1$. 试证明：当 $z\to 0$ 时，$P_U(z)-\dfrac{1}{\pi}\arg z$ 趋于 0. 试将结果推广到任意跳跃和圆的情形.

4. 设 C_1 及 C_2 为单位圆上两段互余的弧，在 C_1 上，令 $U=1$，在 C_2 上，令 $U=0$. 试求 $P_U(z)$ 的显式，并证明那段与 C_1 相对、由过 z 及 C_1 的两端

点的直线所截出的弧的长度等于 $2\pi P_U(z)$.

5. 求证均值公式(62)对 $u=\log|1+z|$, $z_0=0$, $r=1$ 仍成立，应用这一点，计算积分

$$\int_0^\pi \log\sin\theta\, d\theta.$$

6. 若 $f(z)$ 在全平面内解析，并设 $z\to\infty$ 时 $z^{-1}\mathrm{Re} f(z)\to 0$，试证 f 是一常数. [提示：使用(66).]

7. 若 $f(z)$ 在 ∞ 的一个邻域中解析，并设 $z\to\infty$ 时 $z^{-1}\,\mathrm{Re} f(z)\to 0$，试证 $\lim\limits_{z\to+\infty} f(z)$ 存在.（换言之，在 ∞ 的弧立奇点是可去的）. [提示：首先用 Cauchy 积分公式证明 $f=f_1+f_2$，其中随 $z\to\infty$，$f_1(z)\to 0$，$f_2(z)$ 在全平面内解析.]

8. 若 $u(z)$ 在 $0<|z|<\rho$ 上调和并且 $\lim\limits_{z\to 0} zu(z)=0$. 试证明 u 可写成形式 $u(z)=\alpha\log|z|+u_0(z)$，其中 α 是一常数，u_0 在 $|z|<\rho$ 中是调和的. [提示：选取 α 如(61). 然后证明 u_0 是一个解析函数 $f_0(z)$ 的实部，并用上一习题得出结论：在 0 的奇点是可去的.]

6.5 对称原理

对称原理或反射原理的一种初等情形已在线性变换中讨论过（第 3 章 3.3 节）. 另外，还有许多更为一般的形式，都是由 H. A. Schwarz 首先阐述的.

反射原理的依据是：若 $u(z)$ 是调和函数，则 $u(\bar z)$ 也必是调和函数，若 $f(z)$ 是解析函数，则 $\overline{f(\bar z)}$ 也必是解析函数. 更精确地说，若 $u(z)$ 在域 Ω 内调和，$f(z)$ 在 Ω 内解析，则作为 z 的函数，$u(\bar z)$ 必在域 Ω^* 内调和，$\overline{f(\bar z)}$ 必在域 Ω^* 内解析，这里 Ω^* 是由 Ω 对实轴反射而成的；也就是说，当且仅当 $\bar z\in\Omega$ 时 $z\in\Omega^*$. 这些叙述可由通常的核验来证明.

考虑一个对称区域的情形：$\Omega^*=\Omega$. 由于 Ω 是连通的，它必与实轴沿至少一个开区间相交. 设 $f(z)$ 在 Ω 内解析，并设 $f(z)$ 至少在实轴的一个区间处是实的. 由于 $f(z)-\overline{f(\bar z)}$ 是解析的，并在实轴上等于零，因此它必在 Ω 内恒等于零，于是在 Ω 内 $f(z)=\overline{f(\bar z)}$. 用记号 $f=u+iv$，这样就有 $u(z)=u(\bar z)$, $v(z)=$

$-v(z)$.

这是重要的，但确切地说，还是一个较弱的结果．因为我们假设了$f(z)$在全Ω内已知是解析的．现在记Ω与上半平面的交为Ω^+、Ω与实轴的交为σ．假设$f(z)$在$\Omega^+\cup\sigma$上有定义，在Ω^+内解析，在σ上连续并且是实的．在这些条件下，我们来证明，$f(z)$是一个在全Ω内解析并满足对称条件$f(z)=\overline{f(\bar{z})}$的函数限制在$\Omega^+$上的约束．换言之 我们的定理的一部分断言$f(z)$具有一个扩张到$\Omega$的解析延拓．

即使在这一阐述中，假设仍是太强了．事实上，主要的是要求虚部$v(z)$在σ上等于零，至于实部，那就不需作任何假设．所以，在反射原理的确切叙述中，侧重点是在调和函数上．

定理24 设Ω^+是一个对称区域Ω在上半平面的部分，σ是实轴在Ω中的部分．假设$v(x)$在$\Omega^+\cup\sigma$中连续，在Ω^+中调和而在σ上等于零．则v具有一个扩张到Ω的调和延拓，满足对称关系$v(\bar{z})=-v(z)$．在相同条件下，如果v是Ω^+中的一个解析函数$f(z)$的虚部，则$f(z)$具有一个满足$f(z)=\overline{f(\bar{z})}$的解析延拓．

为证明这个定理，作函数$V(z)$，使在Ω^+内等于$v(z)$，在σ上等于零，而在Ω^+的镜象中等于$-v(\bar{z})$．我们要证明v在σ上调和．对于点$x_0\in\sigma$，考虑一个中心x_0含于Ω中的圆盘，以P_V表示相对于这一圆盘的由边值V组成的Poisson积分．差$V-P_V$在圆盘的上半部分内是调和的．根据定理23，它在半圆周上以及在直径上都等于零．因为按定义，$V\to0$，而按对称性，P_V等于零．极值原理蕴涵着在上半圆盘中$V=P_V$，而对下半圆盘，可重复同样的证明，因此得出结论：V在整个圆盘中调和，特别是在x_0调和．

至于定理的余下部分，仍考察中心在σ的一个圆盘．我们已经将v扩张到整个圆盘，并且v在同一圆盘中有一共轭调和函数$-u_0$，对它，可加以正规化而使在上半圆盘内$u_0=\mathrm{Re}f(z)$．考虑

$$U_0(z)=u_0(z)-u_0(\bar{z}).$$

显然，在实直径上$\partial U_0/\partial x=0$，又

$$\frac{\partial U_0}{\partial y}=2\frac{\partial u_0}{\partial y}=-2\frac{\partial v}{\partial x}=0.$$

由此可知解析函数 $\partial U_0/\partial x - i\,\partial U_0/\partial y$ 在实轴上等于零，因而恒等于零. 所以 U_0 是一常数，而这一常数显然是零. 这样就证明了 $u_0(z)=u_0(\bar{z})$.

这构造可对任意圆盘重复做. 显然，在互相交迭的圆盘中，u_0 重合在一起，定义可扩张到全 Ω，于是定理得证.

这定理有明显的推广. 域 Ω 可取为关于圆 C 对称，而不是关于一直线对称，当 z 趋于 C 时，可以假设 $f(z)$ 趋于另一圆 C'. 在这样的条件下，$f(z)$ 有一解析延拓，它把关于 C 对称的点映成关于 C' 对称的点.

习　题

1. 如果 $f(z)$ 在整个平面中解析，在实轴上取实值，在虚轴上为纯虚数，试证明 $f(z)$ 是奇函数.

2. 试证明在对称区域 Ω 中解析的任一函数 f 可以写成形式 f_1+if_2，其中 f_1、f_2 在 Ω 中解析，并在实轴上取实值.

3. 如果 $f(z)$ 在 $|z|\leqslant 1$ 中解析，并在 $|z|=1$ 上满足 $|f|=1$，试证明 $f(z)$ 是有理函数.

4. 用(66)导出 $f'(z)$ 的公式，用 $u(z)$ 表示.

5. 如果 $u(z)$ 是调和函数，且当 $y>0$ 时，$0\leqslant u(z)\leqslant Ky$，证明 $u=ky$，其中 $0\leqslant k\leqslant K$. [对实轴反射，使成为完整的解析函数 $f(z)=u+iv$，用习题 4 证明 $f'(z)$ 是有界的.]

第5章 级数与乘积展开

充分一般的定理在解析函数理论中有它们固有的地位，但必须记住，整个理论肇源于这样的愿望，即希望能处理明显的解析表达式。这些表达式取无穷级数、无穷乘积和其它极限的形式。本章一部分将处理这些极限所遵从的一些规则；另一部分处理初等超越函数和其它特殊函数的明显表示式。

1 幂级数展开式

在第2章我们已经初步研究过幂级数，主要是为了定义指数函数和三角函数。不用积分就不可能证明任一解析函数都有一个幂级数展开式。这个问题现在将作肯定的回答，基本上作为 Cauchy 定理的一个应用。

第一小节讨论解析函数序列的更一般的性质。

1.1 Weierstrass 定理

有关解析函数序列收敛性的主要定理断言，解析函数的一致收敛序列的极限仍是一解析函数。我们必须妥善地叙述其假设条件，使之精确，而且还不能使之限制过严。

考察函数序列$\{f_n(z)\}$，其中每一$f_n(z)$是定义在一个域Ω_n内的解析函数。对于这一序列的极限函数$f(z)$，我们应当在某一域Ω内来加以考虑，显然，如果$f(z)$定义在Ω内，则Ω的每一点必属于所有的Ω_n，此处n是大于某一n_0的数。一般说来，对于Ω的所有点，n_0都是不同的，因此就不必要求Ω内的收敛是一致的。事实上，在多数典型的情况下，诸域Ω_n组成一递增序列：$\Omega_1\subset\Omega_2\subset\cdots\subset\Omega_n\subset\cdots$，而$\Omega$则是$\Omega_n$的并集。在这种场合，$\{f_n(z)\}$中没有一

个函数是定义在Ω的全部域内的；尽管收敛不可能一致的，但是在Ω的所有点上，极限$f(z)$仍可以存在.

我们取$f_n(z)=z/(2z^n+1)$并令Ω_n为圆盘$|z|<2^{-1/n}$来作为一个最简单的例子. 如取圆盘$|z|<1$作为域Ω，则在这个圆盘之中，显然有$\lim_{n\to\infty} f_n(z)=z$. 为了研究收敛的一致性，作差

$$f_n(z)-z=-2z^{n+1}/(2z^n+1).$$

对于z的任一给定的值，取$n>(\log 4/\varepsilon)/(\log 1/|z|)$即可令$|z^n|<\varepsilon/4$. 如$\varepsilon<1$，则$2|z|^{n+1}<\varepsilon/2$，$|1+2z^n|>\frac{1}{2}$，因此$|f_n(z)-z|<\varepsilon$. 由此可知，在任一闭圆盘$|z|\leqslant r<1$中，或在这样一个闭圆盘的任一子集上，收敛是一致的.

用另一种方式来说，那就是上例中的序列$\{f_n(z)\}$在域Ω的任一紧致子集上一致收敛于极限函数$f(z)$. 事实上，在一紧致集上，$|z|$具有一极大值$r<1$，因此这一集包含于闭圆盘$|z|\leqslant r$之中. 这是属于典型的情形. 一般说来，我们常可以证明在Ω的任一紧致子集上的收敛总是一致的；另一方面，这正是我们下面所要证明的定理的自然条件.

定理 1 设$f_n(z)$是定义在域Ω_n内的解析函数，序列$\{f_n(z)\}$在一域Ω内收敛于极限函数$f(z)$，而且在Ω的任一紧致子集上收敛是一致的. 那末$f(z)$必在Ω内解析. 又$f_n'(z)$在Ω的任一紧致子集上一致收敛于$f'(z)$.

应用 Morera 定理(第 4 章 2.3 节)即可很容易地证明$f(z)$的解析性. 令$|z-a|\leqslant r$为包含在Ω中的一个闭圆盘；由定理的假设条件可以推知，对于大于某一n_0的所有n，这一圆盘包含在全部Ω_n之中❶. 令γ为$|z-a|<r$中的任一闭曲线，则根据 Cauchy 定理，对于$n>n_0$，

$$\int_\gamma f_n(z)dz=0.$$

由于在γ上的一致收敛性，故得

❶ 事实上，域Ω_n全体组成$|z-a|\leqslant r$的一个开覆盖. 圆盘是紧致的，因此它具有一有穷的子覆盖. 这就是说，它包含在一个固定的Ω_{n_0}中.

$$\int_\gamma f(z)dz=\lim_{n\to\infty}\int_\gamma f_n(z)dz=0,$$

又根据 Morera 定理，$f(z)$在 $|z-a|<r$ 内解析．因此 $f(z)$ 在整个域 Ω 内解析．

另一更直接的证法以积分公式

$$f_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f_n(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}$$

为依据，其中 C 为圆 $|\zeta-a|=r$ 且 $|z-a|<r$．命 n 趋向于 ∞，根据一致收敛性可得

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z},$$

这一公式表明 $f(z)$在圆盘内解析．应用公式

$$f_n'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f_n(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z)^2},$$

根据上面的同样理由可得

$$\lim_{n\to\infty}f_n'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z)^2}=f'(z),$$

通过简单的估计即可看出，对于 $|z-a|\leqslant\rho<r$，收敛是一致的．Ω 的任一紧致子集都可用有穷个这样的闭圆盘来遮盖，因此知每一紧致子集上的收敛是一致的．于是定理得证，重复应用这一定理可知，在 Ω 的每一紧致子集上，$f_n^{(k)}(z)$一致收敛于 $f^{(k)}(z)$．

定理 1 是由 Weierstrass 所提出的，他写成一个等价的形式．将这一定理应用于以解析函数为项的级数具有特别重要的意义．这一定理于是可表述如下：

设级数

$$f(z)=f_1(z)+f_2(z)+\cdots+f_n(z)+\cdots$$

的每一项都是解析函数，并设这一级数在域 Ω 的每一紧致子集上一致收敛，则级数的和 $f(z)$ 必在 Ω 内解析，而且级数可逐项微分．

应用极值原理可以更容易地证明紧致点集 A 上的一致收敛性．事实上，使用定理 1 的记法，差 $|f_m(z)-f_n(z)|$ 在 A 的边界上达到其在 A 中的极大值．因此，在 A 的边界上的一致收敛就意味

着在 A 上的一致收敛．例如，设函数 $f_n(z)$ 在圆盘 $|z|<1$ 内解析，如果我们能够证明序列在每一个圆 $|z|=r_m$ 上一致收敛，此处 $\lim\limits_{m\to\infty} r_m=1$，应用 Weierstrass 定理，可证极限函数必是解析的．

下面的定理归功于 A. Hurwitz:

定理 2 设函数 $f_n(z)$ 在域 Ω 中都解析且 $\neq 0$，并设 $f_n(z)$ 在 Ω 的任一紧致子集上一致收敛于 $f(z)$，则 $f(z)$ 在 Ω 中或者恒等于零，或者永不等于零．

假设 $f(z)$ 不恒等于零．$f(z)$ 的零点在任何情况下都是孤立的．因此，对任一点 $z_0\in\Omega$，存在一个数 $r>0$，使得 $f(z)$ 在 $0<|z-z_0|\leqslant r$ 上有定义且 $\neq 0$．特别，$|f(z)|$ 在圆 $|z-z_0|=r$ 上有一正的极小值，记这圆为 C．由此可知，在 C 上，$1/f_n(z)$ 一致收敛于 $1/f(z)$．因为在 C 上还一致地有 $f_n'(z)\to f'(z)$ 成立，故可断定

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f_n'(z)}{f_n(z)}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f'(z)}{f(z)}dz.$$

但左端的积分全都是零，因为它们给出方程 $f_n(z)=0$ 在 C 内部的根的个数．所以右端的积分是零，因此，根据积分的同一解释，$f(z_0)\neq 0$．由于 z_0 是任意的，所以定理得证．

习　　题

1．对 $\log(1+z/n)$ 的一个分支应用 Taylor 定理，求证

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n=e^z$$

在所有紧致集上是一致的．

2．求证级数 $$\zeta(z)=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-z}$$

在 $\mathrm{Re}\,z>1$ 时收敛，并将其导数表成级数形式．

3．求证 $$(1-2^{1-z})\zeta(z)=1^{-z}-2^{-z}+3^{-z}-\cdots$$

并证明右边的级数当 $\mathrm{Re}\,z>0$ 时是 z 的解析函数．

4．作为定理 2 的一个推广，证明：若 $f_n(z)$ 在 Ω 内至多有 m 个零点，则 $f(z)$ 或者恒等于零，或者至多有 m 个零点．

5. 证明
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{uz^n}{1-z^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{(1-z^n)^2}$$
对 $|z|<1$ 成立.（展成一个二重级数，并反转求和的次序.）

1.2 Taylor 级数

现在我们来证明每一解析函数都可展为收敛的 Taylor 级数. 这实际上是第 4 章 3.1 节定理 8 的有限 Taylor 展开及对应的余项表示的一个直接推论. 根据该定理，如 $f(z)$在包含 z_0 的一个域 Ω 内解析，则

$$f(z)=f(z_0)+\frac{f'(z_0)}{1!}(z-z_0)+\cdots+\frac{f^{n}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$
$$+f_{n+1}(z)(z-z_0)^{n+1},$$
$$f_{n+1}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z_0)^{n+1}(\zeta-z)}.$$

最后一式中的 C 是任意一个包含于 Ω 内的闭圆盘 $|z-z_0|\leqslant\rho$ 的周界 $|z-z_0|=\rho$.

命 M 为 $|f(z)|$ 在 C 上的极大值，则可得估值
$$|f_{n+1}(z)(z-z_0)^{n+1}|\leqslant\frac{M|z-z_0|^{n+1}}{\rho^n(\rho-|z-z_0|)}.$$

我们得出结论：余项在任一圆盘 $|z-z_0|\leqslant r<\rho$ 中一致地趋于零. 另一方面，可取 ρ 任意地接近于 z_0 至 Ω 的边界的最短距离，这样就证明了下述定理：

定理 3 设 $f(z)$ 在域 Ω 内解析，z_0 为 Ω 内一点，则在 Ω 中以 z_0 为圆心的最大开圆盘内，下列表示式成立：
$$f(z)=f(z_0)+\frac{f'(z_0)}{1!}(z-z_0)+\cdots+\frac{f^{n}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n+\cdots.$$

由此可知，Taylor 级数的收敛半径至少应等于点 z_0 至 Ω 边界的最小距离. 收敛半径可大于这个数，但此时就不能保证级数在所有既属于域 Ω 又属于收敛圆的点上仍代表函数 $f(z)$.

我们回忆展开式
$$e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7} + \cdots$$

可用来作为它们所代表的函数的定义．当然，象我们早已指出的，每一个收敛幂级数是它自身的 Taylor 级数．前面我们已给出了幂级数可以逐项微分的一个直接证明，这也是 Weierstrass 定理的一个直接推论．

如需将 z 的非整数幂或 $\log z$ 用幂级数来表示，则首先应选择一定义妥贴的分支，而后选定一个中心 $z_0 \neq 0$．同样，如需将函数 $(1+z)^\mu$ 或 $\log(1+z)$ 在原点附近展开，则应选择在原点上分别等于 1 或 0 的那一分支．因为这一分支在 $|z|<1$ 内是单值而且解析的，故知收敛半径至少等于 1．计算系数就很简单，结果有

$$(1+z)^\mu = 1 + \mu z + \binom{\mu}{2} z^2 + \cdots + \binom{\mu}{n} z^n + \cdots,$$

$$\log(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \frac{z^5}{5} - \cdots,$$

上式中的二项式系数规定为

$$\binom{\mu}{n} = \frac{\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n+1)}{1\cdot 2\cdots n}.$$

如果对数级数的收敛半径大于 1，则 $\log(1+z)$ 将在 $|z|<1$ 时有界．但这情形并不存在，故知收敛半径恰等于 1．同样，如二项式级数可在半径 >1 的圆内收敛，则函数 $(1+z)^\mu$ 及其所有导数将在 $|z|<1$ 内有界．除非 μ 是一正整数，否则导数之一将为 $1+z$ 的负数次乘幂，因此无界．由此可知收敛半径也恰等于 1，但在二项式级数简化为一多项式的情形为例外．

函数 $\arctan z$ 及 $\arcsin z$ 的级数展开可从导出级数来求．从展开式

$$\frac{1}{1+z^2} = 1 - z^2 + z^4 - z^6 + \cdots$$

经积分后可得

$$\arctan z=z-\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}-\frac{z^7}{7}+\cdots,$$

其中,所选择的分支唯一地由

$$\arctan z=\int_0^z \frac{dz}{1+z^2}$$

所确定,积分是沿单位圆内的任一路线进行的. 根据一致收敛性,或者应用定理 2 即可验证上式. 上述级数的收敛半径不能大于导出级数的收敛半径,因此恰等于 1.

如$\sqrt{1-z^2}$为具有正实部的分支,则对于 $|z|<1$, 有

$$\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}=1+\frac{1}{2}z^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}z^4+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}z^6+\cdots,$$

经积分后可得

$$\arcsin z=z+\frac{1}{2}\frac{z^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{z^5}{5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{z^7}{7}+\cdots.$$

这一级数表示 $\arcsin z$ 的主支, 其实部介于 $-\pi/2$ 及 $\pi/2$ 之间.

对于初等函数的组合, 在大多数情形下不可能找到求系数的一般规律. 不过,为了求得前面几个系数,我们并不需要算出逐阶导数. 有几种较为简单的方法, 可用以算出我们所需要的全部系数.

为了方便起见,我们用记号$[z^n]$表示任一解析函数, 它在原点处具有一个阶数至少为 n 的零点; 或者说, $[z^n]$代表一个"包含因子 z^n"的函数. 应用这一记法,可将任一在原点处解析的函数写成如下形式:

$$f(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n+[z^{n+1}],$$

式中的系数都是唯一地确定的,而且等于 $f(z)$的Taylor 系数. 这样, 为了求得 Taylor 展开中前 n 个系数, 我们只要确定一个多项式 $P_n(z)$, 使得 $f(z)-P_n(z)$ 在原点处具有一个阶数至少为 $n+1$ 的零点就够了. $P_n(z)$ 的次数不关紧要; 可以肯定,在任何情况下, z^m, $m\leqslant n$ 的系数就是 $f(z)$的 Taylor 系数.

举例来说, 设

$$f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n+\cdots,$$

$$g(z)=b_0+b_1z+b_2z^2+\cdots+b_nz^n+\cdots.$$

为了简单起见，应用记法：$f(z)=P_n(z)+[z^{n+1}]$，$g(z)=Q_n(z)+[z^{n+1}]$. 显然，$f(z)g(z)=P_n(z)Q_n(z)+[z^{n+1}]$，在 P_nQ_n 中，次数 $\leqslant n$ 的项的系数就是积 $f(z)g(z)$ 的 Taylor 系数. 故得

$$f(z)g(z)=a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)z+\cdots+(a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_nb_0)z^n+\cdots.$$

在导出这一展开式的时候，我们没有提到收敛性的问题，但是因为这一展开式与 $f(z)g(z)$ 的 Taylor 展开式完全一样，故根据定理 3 可知，其收敛半径至少应等于所给级数 $f(z)$ 及 $g(z)$ 的收敛半径中的较小的一个数. 在 P_nQ_n 的实际计算中，当然不需要去确定次数高于 n 的项.

对于商 $f(z)/g(z)$，只要 $g(0)=b_0\neq 0$，其展开式即可用同样的方法求得. 作普通的除法，一直除到余数中包含有因子 z^{n+1}，此时即可确定一多项式 R_n，它满足关系 $P_n=Q_nR_n+[z^{n+1}]$. 于是 $f-R_ng=[z^{n+1}]$，而因 $g(0)\neq 0$，故得 $f/g=R_n+[z^{n+1}]$. R_n 的系数就是 $f(z)/g(z)$ 的 Taylor 系数. 这种系数可写成行列式，但因过于复杂，在实用上并不相宜.

求复合函数 $f(g(z))$ 的展开式也是一个重要的问题. 此时，如将 $g(z)$ 在 z_0 附近展开，则 $f(w)$ 的展开式应是 $w-g(z_0)$ 的幂级数. 为了简化起见，设 $z_0=0$，$g(0)=0$. 于是可令

$$f(w)=a_0+a_1w+\cdots+a_nw^n+\cdots,$$

且 $g(z)=b_1z+b_2z^2+\cdots+b_nz^n+\cdots$. 仍用上面的记法，令 $f(w)=P_n(w)+[w^{n+1}]$，$g(z)=Q_n(z)+[z^{n+1}]$，$Q_n(0)=0$. 在代入 $w=g(z)$ 时，应注意到

$$P_n(Q_n+[z^{n+1}])=P_n(Q_n(z))+[z^{n+1}],$$

且形如 $[w^{n+1}]$ 的任一表达式变为一个 $[z^{n+1}]$. 这样，就得到

$$f(g(z))=P_n(Q_n(z))+[z^{n+1}],$$

$f(g(z))$ 的 Taylor 系数就是多项式 $P_n(Q_n(z))$ 的次数 $\leqslant n$ 的项的系数.

最后，我们来讨论解析函数 $w=g(z)$ 的反函数的展开问题. 此

处不妨设 $g(0)=0$, 并须求得反函数 $z=g^{-1}(w)$的一个分支，它在原点邻域中解析而当 $w=0$ 时等于零. 反函数存在的充要条件是 $g'(0)\neq 0$; 因此设

$$g(z)=a_1z+a_2z^2+\cdots=Q_n(z)+[z^{n+1}],$$

其中 $a_1\neq 0$. 现在的问题就是要确定一个多项式 $P_n(w)$, 使得 $P_n(Q_n(z))=z+[z^{n+1}]$. 事实上，由于 $a_1\neq 0$, 故$[z^{n+1}]$及$[w^{n+1}]$是可以互换的,而从 $z=P_n(Q_n(z))+[z^{n+1}]$ 可得 $z=P_n(g(z)+[z^{n+1}])+[z^{n+1}]=P_n(w)+[w^{n+1}]$. 因此，$P_n(w)$可确定 $g^{-1}(w)$的系数.

为了证明多项式 P_n 的存在，可用归纳法. 显然，我们可取 $P_1(w)=w/a_1$. 如 P_{n-1} 为已给定,则令 $P_n=P_{n-1}+b_nw^n$, 于是

$$\begin{aligned}P_n(Q_n(z))&=P_{n-1}(Q_n(z))+b_na_1^nz^n+[z^{n+1}]\\&=P_{n-1}(Q_{n-1}(z)+a_nz^n)+b_na_1^nz^n+[z^{n+1}]\\&=P_{n-1}(Q_{n-1}(z))+P'_{n-1}(Q_{n-1}(z))a_nz^n\\&\quad+b_na_1^nz^n+[z^{n+1}].\end{aligned}$$

在最后一式中，前两项组成一个多项式，它的形式为 $z+c_nz^n+[z^{n+1}]$, 因此只要令 $b_n=-c_na_1^{-n}$ 即可.

在实用上，反函数的展开式可用逐次代入法来求. 为了说明这一方法,我们试从级数

$$w=\arctan z=z-\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}-\cdots$$

来确定 $\tan w$ 的展开式. 如果我们要求展开式包含 z 的5次幂，可令

$$z=w+\frac{z^3}{3}-\frac{z^5}{5}+[z^7],$$

将这一式代入右边的项内,除了适当的余项外,有

$$\begin{aligned}z&=w+\frac{1}{3}\left(w+\frac{z^3}{3}+[w^5]\right)^3-\frac{1}{5}(w+[w^3])^5+[w^7]\\&=w+\frac{1}{3}w^3+\frac{1}{3}w^2z^3-\frac{1}{5}w^5+[w^7]\\&=w+\frac{1}{3}w^3+\frac{1}{3}w^2(w+[w^3])^3-\frac{1}{5}w^5+[w^7]\\&=w+\frac{1}{3}w^3+\frac{2}{15}w^5+[w^7].\end{aligned}$$

由此可得 $\tan w$ 展开式的前几项为

$$\tan w = w + \frac{1}{3} w^3 + \frac{2}{15} w^5 + \cdots.$$

习　　题

1. 将 $1/(1+z^2)$ 展为 $z-a$ 的幂级数，其中 a 为一实数．求系数的通式，如 $a=1$，试化为最简形式．

2. Legendre 多项式定义为下述展开式中的系数 $P_n(\alpha)$，即

$$(1-2\alpha z+z^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + P_1(\alpha)z + P_2(\alpha)z^2 + \cdots.$$

试求 P_1, P_2, P_3 与 P_4.

3. 试将 $\log(\sin z/z)$ 展为 z 的幂级数，写到项 z^6.

4. 在 $\tan z$ 的 Taylor 展开式中，试求 z^7 的系数．

5. Fibonacci 数定义为 $c_0=0$, $c_1=1$, $c_n=c_{n-1}+c_{n-2}$. 求证 c_n 是一有理函数的 Taylor 系数，并确定 c_n 的表达式．

1.3 Laurent 级数

级数

$$b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots + b_n z^{-n} + \cdots \tag{1}$$

可看作是变数 $1/z$ 的一个普通幂级数．因此，这一级数应在某一圆 $|z|=R$ 的外部收敛，$R=\infty$ 的情形当然为例外；在每一个域 $|z|\geqslant\rho>R$ 中级数的收敛是一致的，因此，这一级数就表示一个在域 $|z|>R$ 内的解析函数．如级数(1)与一个普通的幂级数组合，则得更一般的级数如下：

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n. \tag{2}$$

这一级数仅当非负数次乘幂部分以及负数次乘幂部分分别收敛时收敛．由于非负数次乘幂部分在圆盘 $|z|<R_2$ 内收敛，而负数次乘幂部分在域 $|z|>R_1$ 中收敛，故知只有在 $R_1<R_2$ 时才能有一共同的收敛域，此时(2)表示环域 $R_1<|z|<R_2$ 内的一个解析函数．

反之，我们可从一个解析函数 $f(z)$ 来考虑，它的定义域包含一个环域 $R_1<|z|<R_2$，或更一般地包含环域 $R_1<|z-a|<R_2$. 我

们将证明，这样一个函数常可以展为一个一般的幂级数，其形为

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}A_n(z-a)^n.$$

证明很简单.我们所要证明的是：$f(z)$ 可写成 $f_1(z)+f_2(z)$ 的形式，此处 $f_1(z)$ 在 $|z-a|<R_2$ 内解析，而 $f_2(z)$ 则对 $|z-a|>R_1$ 解析，在 ∞ 处有一可去奇点. 在这种情况下，$f_1(z)$ 就可以展为 $z-a$ 的非负数次幂级数，而 $f_2(z)$ 则可展为 $1/(z-a)$ 的非负数次幂级数.

为了确定表示式 $f(z)=f_1(z)+f_2(z)$，对于 $|z-a|<r<R_2$，以下式定义 $f_1(z)$，即

$$f_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-a|=r}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z},$$

而对于 $R_1<r<|z-a|$，则以下式定义 $f_2(z)$，即

$$f_2(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-a|=r}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}.$$

在两个积分式中，r 的值是无关紧要的，只要不等式能满足即可，因为根据 Cauchy 定理，当圆不通过点 z 时，积分的值并不随 r 变化. 因此，$f_1(z)$ 及 $f_2(z)$ 分别唯一地确定在 $|z-a|<R_2$ 及 $|z-a|>R_1$ 之中，且各表这些域中的解析函数. 此外，根据 Cauchy 积分定理有 $f(z)=f_1(z)+f_2(z)$.

$f_1(z)$ 的 Taylor 展开式为

$$f_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n(z-a)^n,$$

其中

$$A_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-a|=r}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}}.\tag{3}$$

为了求得 $f_2(z)$ 的展开式，作变换 $\zeta=a+1/\zeta'$，$z=a+1/z'$. 这一变换把 $|\zeta-a|=r$ 变成 $|\zeta'|=1/r$，具有负的取向，经简单的运算后可得

$$f_2\left(a+\frac{1}{z'}\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta'|=\frac{1}{r}}\frac{z'}{\zeta'}\frac{f\left(a+\frac{1}{\zeta'}\right)d\zeta'}{\zeta'-z'}=\sum_{n=1}^{\infty}B_n z'^n,$$

其中

$$B_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta'|=\frac{1}{r}}\frac{f\left(a+\frac{1}{\zeta'}\right)d\zeta'}{\zeta'^{n+1}}=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-a|=r}f(\zeta)(\zeta-a)^{n-1}d\zeta.$$

这一公式表明

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}A_n(z-a)^n,$$

其中所有的系数 A_n 都由(3)确定。注意，只要 $R_1<r<R_2$，(3)中的积分与 r 无关.

如果 $R_1=0$，则点 a 是一个孤立奇点，而 $A_{-1}=B_1$ 是 a 处的留数，因为 $f(z)-A_{-1}(z-a)^{-1}$ 是 $0<|z-a|<R_2$ 中的一个单值函数的导数.

习　题

1．求证 Laurent 展开式是唯一的.

2．设 Ω 为一双连通域，它的余集由分集 E_1、E_2 组成．求证域 Ω 内的每一解析函数 $f(z)$ 可写成 $f_1(z)+f_2(z)$，此处，$f_1(z)$ 在 E_1 的外部解析；$f_2(z)$ 在 E_2 的外部解析．(精确的证明需要一个象第 4 章 **4.5** 节中那样的结构.)

3．表达式　　$\{f,z\}=\frac{f'''(z)}{f'(z)}-\frac{3}{2}\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)^2$

称为 f 的 Schwarz 导数．若 f 具有一个重零点或极点，求 $\{f,z\}$ 的 Laurent 展开式的首项.

答：如果 $f(z)=a(z-z_0)^m+\cdots$，则 $\{f,z\}=\frac{1}{2}(1-m)^2(z-z_0)^{-2}+\cdots$.

4．求证 $(e^z-1)^{-1}$ 在原点处的 Laurent 展开式为

$$\frac{1}{z}-\frac{1}{2}+\sum_1^\infty(-1)^{k-1}\frac{B_k}{(2k)!}z^{2k-1},$$

此处 B_k 称为 Bernoulli 数，都是正的．求 B_1、B_2、B_3．(由 **2.1** 节习题 **5**，B_k 都是正的.)

5．试以 Bernoulli 数表示 $\tan z$ 的 Taylor 级数展开式及 $\cot z$ 的 Laurent 展开式.

2　部分分式与因子分解

一个有理函数有两种标准表示，其一是部分分式表示，另一是

分子分母的因子分解表示．本节专门讨论任意半纯函数的类似表示式．

2.1 部分分式

如果函数 $f(z)$ 是域 Ω 内的一个半纯函数，则对应于每一个极点 b_ν，有 $f(z)$ 的一个奇部，由 Laurent 级数中包含 $z-b_\nu$ 的负数次乘幂的部分组成；它是一个多项式，记之为 $P_\nu(1/(z-b_\nu))$．我们应当减去所有的奇部，借以求得如下的表示：

$$f(z)=\sum_\nu P_\nu\left(\frac{1}{z-b_\nu}\right)+g(z), \tag{4}$$

其中 $g(z)$ 应在 Ω 内解析．不过，右侧的和一般是无穷的，而且不能保证级数一定收敛．虽然如此，在很多情形仍有级数收敛，而且常可以从一般考察中来确定 $g(z)$ 的显式．在这种情形下，结果是非常有意义的；我们可以得到一个十分有用的简单展开式．

如果(4)中的级数并不收敛，则所用的方法应加修正．很明显，如果从每一奇部 P_ν 中减去一个解析函数 $p_\nu(z)$，将不致引起本质的变化．而适当选择函数 p_ν 就可使级数 $\sum_\nu(P_\nu-p_\nu)$ 收敛．我们甚至可把 $p_\nu(z)$ 取为多项式．

我们不准备用这一意义证明最一般的定理．但在 Ω 是整个平面的情形，我们将证明：每一个半纯函数具有一个部分分式的展开式，而且奇部可以任意构作．这一定理及其在任意域上的推广是由 Mittag-Leffler 提出的．

定理 4 设 $\{b_\nu\}$ 为一个复数序列，且 $\lim_{\nu\to\infty} b_\nu=\infty$，并设 $P_\nu(\zeta)$ 为不具有常数项的多项式．则必存在一些函数，在整个平面中为半纯，以点 b_ν 为极点，对应的奇部为 $P_\nu(1/(z-b_\nu))$．而且这一类半纯函数的最一般形式可写成：

$$f(z)=\sum_\nu\left[P_\nu\left(\frac{1}{z-b_\nu}\right)-p_\nu(z)\right]+g(z), \tag{5}$$

其中 $p_\nu(z)$ 是适当选择的固定多项式，$g(z)$ 是整个平面中的一个解析函数．

我们可以假设没有一个 b_ν 等于零. 由于函数 $P_\nu(1/(z-b_\nu))$ 对于 $|z|<|b_\nu|$ 解析,故可在原点附近展为 Taylor 级数. 取这一级数的部分和, 例如截止到 n_ν 次的项为止的部分和, 作为 $p_\nu(z)$. 差 $P_\nu-p_\nu$ 可用第 4 章 3.1 节中的余项的显式来估计. 如果对于 $|z|\leqslant|b_\nu|/2$, $|P_\nu|$ 的极大值记为 M_ν, 则对所有的 $|z|\leqslant|b_\nu|/4$ 就有

$$\left|P_\nu\left(\frac{1}{z-1}\right)-p_\nu(z)\right|\leqslant 2M\left(\frac{2|z|}{|b_\nu|}\right)^{n_\nu+1}. \tag{6}$$

从这一估值显然可见, 只要取 n_ν 充分大, 就可使(5)式右侧的级数在整个平面中除了极点之外绝对收敛. 例如, 若取 n_ν 使 $2^{n_\nu}\geqslant M_\nu 2^\nu$, 则估值(6)表明,对于充分大的 ν, 级数的通项受控于 $2^{-\nu}$.

此外, 这估值在任一闭圆盘 $|z|\leqslant R$ 中一致成立, 因而只要略去 $|b_\nu|\leqslant R$ 的项, 余下的级数在该圆盘中的收敛实际上是一致的. 根据 Weierstrass 定理, 余下的级数表示 $|z|\leqslant R$ 中的一个解析函数, 由是可知, 整个级数在全平面上是亚纯的, 其奇部为 $P_\nu(1/(z-b_\nu))$. 至于定理的其余部分就不证自明了.

我们来考察函数 $\pi^2/\sin^2\pi z$ 作为第一个例子, 这一函数在点 $z=n$(n 为整数) 具有二阶极点. 原点处的奇部为 $1/z^2$, 又因 $\sin^2\pi(z-n)=\sin^2\pi z$, 故知 $z=n$ 处的奇部为 $1/(z-n)^2$. 级数

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(z-n)^2} \tag{7}$$

对于 $z\neq n$ 收敛, 这可与熟知的级数 $\sum_1^\infty 1/n^2$ 比较后看出. 在任一紧致集上, 只要略去在这一集上变为无穷大的项就可使级数一致收敛. 因此有

$$\frac{\pi^2}{\sin^2\pi z}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(z-n)^2}+g(z), \tag{8}$$

此处, $g(z)$ 在整个平面中解析. 我们将断言 $g(z)$ 恒等于零.

为了证明这一点, 注意 $\pi^2/\sin^2\pi z$ 及级数(7)都是周期函数, 它们的周期都是 1. 因此函数 $g(z)$ 具有同一周期. 对于 $z=x+iy$, 有(第 2 章 3.2 节, 习题 4)

$$|\sin \pi z|^2=\cosh^2 \pi y-\cos^2 \pi x,$$

因此，当 $|y|\to\infty$ 时，$\pi^2/\sin^2 \pi z$ 一致地趋于 0. 容易看出，函数(7)也具有同一性质. 事实上，对于 $|y|\geqslant 1$, 收敛是一致的，因此当 $|y|\to\infty$ 时的极限可逐项来求. 于是得知：当 $|y|\to\infty$ 时 $g(z)$ 一致地趋于 0. 这就足以断定 $|g(z)|$ 在一周期带域 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上有界，而根据周期性，$|g(z)|$ 将在整个平面中有界. 由 Liouville 定理可知，$g(z)$ 应为一常数，又因其极限为 0，故这一常数必等于 0. 这样，就证明了下面的恒等式：

$$\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z}=\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2}. \tag{9}$$

将这一等式积分后可得一个有关的恒等式. 左侧部分是 $-\pi\cot\pi z$ 的导数，右侧的项则都是 $-1/(z-n)$ 的导数. 通项为 $1/(z-n)$ 的级数是发散的，必须从 $n\neq 0$ 的所有项中减去 Taylor 级数的一个部分和. 在有些情况下减去常数项就够了，因为级数

$$\sum_{n\neq 0}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right)=\sum_{n\neq 0}\frac{z}{n(z-n)}$$

可与 $\sum\limits_1^\infty 1/n^2$ 比较，因此它是收敛的. 在每一个紧致集上，只要我们略去那些变成无穷大的项，收敛还是一致的. 由此可知逐项微分是许可的，因此得到

$$\pi\cot\pi z=\frac{1}{z}+\sum_{n\neq 0}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right), \tag{10}$$

其中还应有一个附加的常数. 如将对应于 n 及 $-n$ 的项集并起来，则(10)式可写成如下的等价形式：

$$\pi\cot\pi z=\lim_{m\to\infty}\sum_{n=-m}^{m}\frac{1}{z-n}=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-n^2}. \tag{11}$$

从这一形式显然可见等式两边都是 z 的奇函数，因此，积分常数应等于零. 这就证明了(10)及(11)正确.

现在让我们把步骤倒过来进行，并求类似的和

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{-m}^{m}\frac{(-1)^n}{z-n}=\frac{1}{z}+\sum_1^\infty(-1)^n\frac{2z}{z^2-n^2}, \tag{12}$$

这一式显然表示一个半纯函数. 将奇偶的项分开，得到

$$\sum_{-(2k+1)}^{2k+1}\frac{(-1)^n}{z-n}=\sum_{n=-k}^{k}\frac{1}{z-2n}-\sum_{n=-k-1}^{k}\frac{1}{z-1-2n}.$$

与(11)式比较，可知极限为

$$\frac{\pi}{2}\cot\frac{\pi z}{2}-\frac{\pi}{2}\cot\frac{\pi(z-1)}{2}=\frac{\pi}{\sin\pi z},$$

于是得证：

$$\frac{\pi}{\sin\pi z}=\lim_{m\to\infty}\sum_{-m}^{m}(-1)^n\frac{1}{z-n}. \tag{13}$$

习　题

1．试比较 $\cot\pi z$ 的 Laurent 展开及其部分分式展开中的系数，求下列各级数的值：

$$\sum_1^\infty\frac{1}{n^2},\quad \sum_1^\infty\frac{1}{n^4},\quad \sum_1^\infty\frac{1}{n^6}.$$

对于所需的步骤，试给以严格的推证．

2．试将
$$\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{z^3-n^3}$$
表成闭合形式．

3．用(13)求 $1/\cos\pi z$ 的部分分式展开，并证明由是可得

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots.$$

4．求 $\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(z+n)^2+a^2}$ 的值．

5．用习题 1 的方法证明

$$\sum_1^\infty\frac{1}{n^{2k}}=2^{2k-1}\frac{B_k}{(2k)!}\pi^{2k}.$$

(B_k 的定义见 1.3 节习题 4．)

2.2 无穷乘积

无穷多个复数的乘积

$$p_1p_2\cdots p_n\cdots=\prod_{n=1}^{\infty}p_n \tag{14}$$

可以用求部分乘积 $P_n=p_1p_2\cdots p_n$ 的极限来计值．如果这一极限存在且不等于零，则称这无穷乘积收敛于值 $P=\lim_{n\to\infty}P_n$．我们约定 P

不取值零，这有几点理由：首先，如果容许 $P=0$，则任何无穷乘积只要其中有一个因子等于零就将是收敛的，而这种收敛实际与乘数的整个序列无关. 其次，在某些方面这一约定是非常自然的. 事实上，我们需要将一个函数表成一无穷乘积，这不仅应当在一般情形下可能，而且，即使函数具有零点时也应当可以这样做. 根据这一理由，我们作如下的约定：无穷乘积(14)称为是收敛的，当且仅当其因子中至多只有有穷个等于零，而且其不等于零的因子所组成的部分乘积趋于一有穷的非零极限.

在一个收敛的乘积中，一般因子 p_n 必趋于 1；这可将 p_n 写成 $p_n=P_n/P_{n-1}$ 而看出，这里应将零因子略去. 根据这一事实，我们将所有的无穷乘积写成下列形式：

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n), \tag{15}$$

因此，$a_n\to 0$ 就是乘积收敛的必要条件.

如果没有因子等于零，则自然可以将乘积(15)与无穷级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\log(1+a_n) \tag{16}$$

相比较. 由于 a_n 都是复数，对数应规定在一定的分支上，我们决定在每一项中选主支. 将(16)式的部分和记为 S_n. 即 $P_n=e^{S_n}$，又如 $S_n\to S$，则 P_n 趋于一不为 0 的极限 $P=e^S$. 换言之，(16)式的收敛是(15)式收敛的一个充分条件.

为了证明这一条件也是必要的，设 $P_n\to P\neq 0$. 一般说来，由主值形成的级数(16)并不收敛于 $\log P$ 的主值；而我们所要证明的是它收敛于 $\log P$ 的某一值. 为更清楚起见，我们暂时采用把对数的主值记为 Log，它的虚部记为 Arg 的记法.

由于 $P_n/P\to 1$，显见当 $n\to\infty$ 时，$\mathrm{Log}(P_n/P)\to 0$. 因此存在一个整数 h_n，使得 $\mathrm{Log}(P_n/P)=S_n-\mathrm{Log}\,P+h_n\cdot 2\pi i$. 过渡到差，我们求得 $(h_{n+1}-h_n)2\pi i=\mathrm{Log}(P_{n+1}/P)-\mathrm{Log}\,(P_n/P)-\mathrm{Log}\,(1+a_n)$，因此 $(h_{n+1}-h_n)2\pi=\mathrm{Arg}(P_{n+1}/P)-\mathrm{Arg}\,(P_n/P)-\mathrm{Arg}\,(1+a_n)$. 根据定义，$|\mathrm{Arg}(1+a_n)|\leqslant\pi$，我们知道 $\mathrm{Arg}(P_{n+1}/P)-$

$\operatorname{Arg}(P_n/P)\to 0$. 对于大的 n, 这与前面的方程相矛盾, 除非 $h_{n+1}=h_n$. 因此, h_n 最后必等于某一固定的整数 h, 由此从 $\operatorname{Log}(P_n/P)=S_n-\operatorname{Log}P+h\cdot 2\pi i$ 得 $S_n\to\operatorname{Log}P-h\cdot 2\pi i$. 这就证明了下面的定理:

定理 5 无穷乘积 $\prod\limits_1^\infty(1+a_n)$, 其中 $1+a_n\neq 0$, 与级数 $\sum\limits_1^\infty\log(1+a_n)$ 同时收敛, 级数的项表示对数主支的值.

这样, 无穷乘积收敛的问题就可转化为级数收敛的问题. 如果注意到级数(16)在较简单级数 $\sum|a_n|$ 收敛时为绝对收敛, 则还可以得到进一步的简化. 这一论断可从下列事实直接推出:

$$\lim_{z\to 0}\frac{\log(1+z)}{z}=1.$$

事实上, 如果级数(16)或 $\sum\limits_1^\infty|a_n|$ 收敛, 则 $a_n\to 0$, 而对于一个给定的 $\varepsilon>0$, 以及所有充分大的 n, 有下面的不等式成立:

$$(1-\varepsilon)|a_n|<|\log(1+a_n)|<(1+\varepsilon)|a_n|.$$

由此立即可知级数(16)及 $\sum|a_n|$ 实际上同时绝对收敛.

一个无穷乘积称为是绝对收敛的, 当且仅当对应的级数(16)绝对收敛. 于是得如下定理:

定理 6 乘积 $\prod\limits_1^\infty(1+a_n)$ 绝对收敛的必要和充分条件是级数 $\sum\limits_1^\infty|a_n|$ 收敛.

在上一定理中, 我们强调的是绝对收敛. 用一些简单的例子可以说明: $\sum\limits_1^\infty a_n$ 的收敛既不是乘积 $\prod\limits_1^\infty(1+a_n)$ 收敛的必要条件, 也不是充分条件.

以一个变数的函数为因子组成的无穷乘积, 其一致收敛的意义很容易理解. 因子中出现有等于零的函数时将引起一些困难, 但如果我们只考虑至多只有有穷个因子等于零的那些集合, 就可以克服这种困难. 将这些等于零的因子略去, 我们就完全可以研究余下乘积的一致收敛性. 对于函数因子的无穷乘积的一致收敛

性，定理 5 及 6 显然可以照搬过来．从两定理的证明中可以看出，所有的估值都可使之合乎一致性的要求，从而得出一致收敛的结论，至少在紧致集上如此．

习　　题

1．求证
$$\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{2}.$$

2．求证，对于 $|z|<1$，有
$$(1+z)(1+z^2)(1+z^4)(1+z^8)\cdots=\frac{1}{1-z}.$$

3．求证
$$\prod_{1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-z/n}$$
在每一紧致集上绝对而且一致收敛．

4．求证一个绝对收敛的乘积，其值在因子重行排列后并不改变．

5．求证函数
$$\theta(z)=\prod_{1}^{\infty}(1+h^{2n-1}e^{z})(1+h^{2n-1}e^{-z})$$
在整个平面中解析，并满足函数方程
$$\theta(z+2\log h)=h^{-1}e^{-z}\theta(z),$$
此处 $|h|<1$．

2.3　典型乘积

在整个平面中解析的函数称为**整函数**．不为多项式的最简单的整函数如 e^z，$\sin z$，$\cos z$ 等．

如果 $g(z)$ 为一整函数，则 $f(z)=e^{g(z)}$ 也必为整函数，且 $\neq 0$．反之，如 $f(z)$ 为任一不等于零的整函数，则可以证明，$f(z)$ 必具有形式 $e^{g(z)}$．要证明这一点，首先注意到函数 $f'(z)/f(z)$ 在整个平面上解析，它是一个整函数 $g(z)$ 的导数．从这一事实经过计算就可以推知 $f(z)e^{-g(z)}$ 的导数为零，故 $f(z)$ 必是 $e^{g(z)}$ 的常数倍数；这一常数可以并在 $g(z)$ 之内．

应用这一方法我们还可以求得具有有穷个零点的最一般整函

数. 设函数 $f(z)$ 在原点处具有m个零点(m 可以为零), 这一函数的其他零点记为 $a_1, a_2, \cdots, a_N$, 重零点重复计数. 于是显然有

$$f(z)=z^m e^{g(z)} \prod_1^N \left(1-\frac{z}{a_n}\right).$$

如果零点有无穷多个, 我们可以试用无穷乘积来求得一个类似的表示. 这一推广显然是

$$f(z)=z^m e^{g(z)} \prod_1^\infty \left(1-\frac{z}{a_n}\right). \tag{17}$$

这一表示当无穷乘积在每一紧致集上一致收敛时有效. 事实上, 如果这一无穷乘积在每一紧致集上一致收敛, 则它将表示一个整函数, 它的零点和$f(z)$的零点相重(原点除外), 而且零点的重数也相同. 由此可知, 商可以写成 $z^m e^{g(z)}$.

(17)式中的乘积当且仅当 $\sum\limits_1^\infty 1/|a_n|$ 收敛时绝对收敛, 而且此时它在每一个闭圆盘$|z|\leqslant R$ 中的收敛还是一致的. 只有在这种特殊情况下, 我们才能有(17)式的那种表示.

至于在一般的情形, 那就必须应用收敛化因子(convergence-producing factor). 考察复数 $a_n\neq 0$ 的一个任意序列, 此处 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$, 我们来证明, 有这样的多项式$p_n(z)$存在, 使得

$$\prod_1^\infty \left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{p_n(z)} \tag{18}$$

收敛于一个整函数. 这一无穷乘积和一个级数一同收敛, 这个级数的通项为

$$r_n(z)=\log\left(1-\frac{z}{a_n}\right)+p_n(z),$$

式中, 对数的分支应取得能够使 $r_n(z)$ 的虚部介于 $-\pi$ 及 π (包括 π 在内)之间.

对于一个给定的 R, 我们只考察 $|a_n|>R$ 的项. 在圆盘 $|z|\leqslant R$ 上, $\log(1-z/a_n)$的主支可展为 Taylor 级数:

$$\log\left(1-\frac{z}{a_n}\right)=-\frac{z}{a_n}-\frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2-\frac{1}{3}\left(\frac{z}{a_n}\right)^3-\cdots.$$

改变符号, 并且取 $p_n(z)$ 为部分和

$$p_n(z)=\frac{z}{a_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{m_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{m_n}.$$

于是 $r_n(z)$ 的表示式为

$$r_n(z)=-\frac{1}{m_n+1}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{m_n+1}-\frac{1}{m_n+2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{m_n+2}-\cdots$$

并可容易地求得如下的估值:

$$|r_n(z)|\leqslant\frac{1}{m_n+1}\left(\frac{R}{|a_n|}\right)^{m_n+1}\left(1-\frac{R}{|a_n|}\right)^{-1}. \tag{19}$$

现在设级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{m_n+1}\left(\frac{R}{|a_n|}\right)^{m_n+1} \tag{20}$$

收敛. 根据估值(19)可知, $r_n(z)\to 0$, 因此只要 n 足够大, $r_n(z)$ 的虚部就应介于 $-\pi$ 及 π 之间. 而且, 从比较中可以看出级数 $\sum r_n(z)$ 在 $|z|\leqslant R$ 上绝对且一致收敛, 因此乘积(18)就表示一个在 $|z|<R$ 内解析的函数. 在证明中我们必须将 $|a_n|\leqslant R$ 的值排除, 但(18)的一致收敛性在对应因子重行加入时显然并不改变.

剩下的我们只要证明对于所有的 R 都能使级数(20)收敛即可. 但这是很明显的, 因为如取 $m_n=n$, (20)式变成一幂级数, 它的收敛半径是无穷大, 这可应用收敛半径公式来证明, 或研究 R 取任一固定值时的强几何级数(公比<1)来推出.

定理 7 存在一个具有任意规定的零点 a_n 的整函数, 只要在零点为无穷多的情形下, $a_n\to\infty$. 除这些零点之外别无其他零点的任一整函数可以表成如下形式:

$$f(z)=z^m e^{g(z)}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{\frac{z}{a_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{m_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{m_n}}, \tag{21}$$

此处, 乘积是对所有的 $a_n\neq 0$ 取的, m_n 为某些整数, $g(z)$ 为一整函数.

这一定理系由 Weierstrass 提出. 它具有如下一条重要的系:

系 在整个平面上的任一半纯函数必是两个整函数之商.

因为, 如设 $F(z)$ 在整个平面上是半纯的, 则可求得一个整函

数 $g(z)$，以 $F(z)$ 的极点作为该函数的零点. 于是积 $F(z)g(z)$ 是一整函数，记为 $f(z)$. 即得 $F(z)=f(z)/g(z)$.

在表示式(21)中，如能选择所有的 m_n 互等，则这表示式就更为重要. 上面的证明表明，只要级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(R/|a_n|)^{h+1}/(h+1)$ 对所有的 R 收敛，也就是说，只要 $\sum 1/|a_n|^{h+1}<\infty$，则无穷乘积

$$\prod_1^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{\frac{z}{a_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{h}\left(\frac{z}{a_n}\right)^h} \tag{22}$$

收敛，而且表示一整函数. 设 h 为使上述级数收敛的最小整数；于是表达式(22)就称为与序列 $\{a_n\}$ 相关的典型乘积，h 称为典型乘积的亏格(genus).

在表示式(21)中，只要可能的话，我们总应用典型乘积，因此这一表示式是唯一地确定的. 如果在这一表示式中，$g(z)$ 化为一个多项式，则称函数 $f(z)$ 是有穷亏格的，而根据定义，$f(z)$ 的亏格就等于这一多项式的次数或典型乘积的亏格二者之中较大的一数. 例如，亏格等于零的整函数具有下列形式：

$$Cz^m\prod_1^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right),$$

且 $\sum 1/|a_n|<\infty$. 亏格为 1 的整函数的典型表示或者为

$$Cz^me^{\alpha z}\prod_1^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{z/a_n},$$

$\sum 1/|a_n|^2<\infty$，$\sum 1/|a_n|=\infty$；或者为

$$Cz^me^{\alpha z}\prod_1^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right),$$

$\sum 1/|a_n|<\infty$，$\alpha\neq 0$.

作为一个应用，我们来考察 $\sin\pi z$ 的乘积表示. 这一函数的零点为整数 $z=\pm n$. 由于 $\sum 1/n$ 发散，而 $\sum 1/n^2$ 收敛，故应取 $h=1$，于是得如下的表示式：

$$\sin\pi z=ze^{g(z)}\prod_{n\neq 0}\left(1-\frac{z}{n}\right)e^{z/n}.$$

为了确定 $g(z)$，作式子两边的对数导数，得

$$\pi\cot\pi z=\frac{1}{z}+g'(z)+\sum_{n\neq 0}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right),$$

这里所用的方法可以很容易地用任一不包含点 $z=n$ 的紧致集上的一致收敛性来验证. 与前面的公式(10)比较,即知 $g'(z)=0$. 因此 $g(z)$ 是一常数, 而由于 $\lim_{z\to 0}\sin\pi z/z=\pi$, 故必有 $e^{g(z)}=\pi$, 于是得

$$\sin\pi z=\pi z\prod_{n\neq 0}\left(1-\frac{z}{n}\right)e^{z/n}. \tag{23}$$

在这一表示式中,对应于 n 及 $-n$ 的因子可以并在一起, 从而得到较简洁的形式:

$$\sin\pi z=\pi z\prod_{1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right). \tag{24}$$

由(23)式可知 $\sin\pi z$ 是亏格为 1 的整函数。

习　题

1. 设 $a_n\to\infty$, 并设 A_n 均为任意复数. 证明存在一个整函数 $f(z)$, 它满足 $f(a_n)=A_n$.

[提示: 设 $g(z)$ 是在 a_n 有单零点的函数. 证明 $\sum_{1}^{\infty}g(z)\dfrac{e^{\gamma_n(z-a_n)}}{z-a_n}\cdot\dfrac{A_n}{g'(a_n)}$ 对 γ_n 的某一选择收敛.]

2. 求证:

$$\sin\pi(z+\alpha)=e^{\pi z\cot\pi\alpha}\prod_{-\infty}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n+\alpha}\right)e^{-z/(n+\alpha)},$$

只要 α 不为整数.

[提示: 将典型乘积前的因子记为 $g(z)$, 确定 $g'(z)/g(z)$.]

3. 求 $\cos\sqrt{z}$ 的亏格.

4. 设 $f(z)$ 的亏格等于 h, 问 $f(z^2)$ 的亏格能有多大及多小?

5. 求证, 设 $f(z)$ 是亏格为 0 或 1 而且有实零点的函数, 又如 $f(z)$ 在 z 为实数时为实数, 则 $f'(z)$ 的所有零点亦为实数。

[提示: 考虑 $\operatorname{Im}f'(z)/f(z)$.]

2.4 Γ-函数

函数 $\sin\pi z$ 以所有整数为零点, 它是具有这一性质的最简单函数. 现在我们来介绍一种只以正整数或以负整数为零点的函数. 以负整数为零点的最简单函数, 举例来说, 就是对应的典型乘积

$$G(z)=\prod_{1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-z/n}. \tag{25}$$

很明显，$G(-z)$必将以正整数为零点，与 $\sin \pi z$ 的乘积表示(23)比较,立即可得

$$zG(z)G(-z)=\frac{\sin \pi z}{\pi}. \tag{26}$$

由 $G(z)$的构作方式可知,它应具有另外一些简单性质．我们看出 $G(z-1)$ 具有与 $G(z)$ 同样的零点，另外还有一零点在原点．因此,它显然可以写成

$$G(z-1)=ze^{\gamma(z)}G(z),$$

此处 $\gamma(z)$ 为一整函数． 为了确定 $\gamma(z)$，可取式子两边的对数导数,于是得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+n-1}-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{z}+\gamma'(z)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+n}-\frac{1}{n}\right). \tag{27}$$

在左边的级数中,可以 $n+1$ 代 n, 因而

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+n-1}-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{z}-1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{z}-1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+n}-\frac{1}{n}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right).$$

最后一个级数的和为 1, 因此方程(27)变成 $\gamma'(z)=0$． 故知 $\gamma(z)$ 是一常数，记为 γ． 函数 $G(z)$ 具有一种再生性质，即 $G(z-1)=e^{\gamma}zG(z)$．为了简单起见,考察函数 $H(z)=G(z)e^{\gamma z}$,它显然满足函数方程 $H(z-1)=zH(z)$.

γ 的值很容易确定．命 $z=1$, 则得

$$1=G(0)=e^{\gamma}G(1),$$

因此

$$e^{-\gamma}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{-1/n}.$$

此处,第 n 个部分乘积可写为

$$(n+1)e^{-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)},$$

于是得

$$\gamma=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n\right).$$

常数 γ 称为 Euler 常数;它的近似值为 0.57722.

如 $H(z)$ 满足关系 $H(z-1)=zH(z)$，则 $\Gamma(z)=1/[zH(z)]$ 必满足关系 $\Gamma(z-1)=\Gamma(z)/(z-1)$，或

$$\Gamma(z+1)=z\Gamma(z). \tag{28}$$

这是一个非常有用的关系式，因此，习惯上把 $\Gamma(z)$ 也包括在初等函数之中，并称之为 Eular Γ-函数.

从定义可得显表示式：

$$\Gamma(z)=\frac{e^{-\gamma z}}{z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^{-1}e^{z/n}, \tag{29}$$

而公式(26)变为

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z}. \tag{30}$$

易见 $\Gamma(z)$ 是一个半纯函数，有极点在 $z=0,\ -1,\ -2,\ \cdots$，但没有零点.

我们有 $\Gamma(1)=1$，由函数方程得 $\Gamma(2)=1$，$\Gamma(3)=1\cdot2$，$\Gamma(4)=1\cdot2\cdot3$，一般地，$\Gamma(n)=(n-1)!$. 因此，Γ-函数可看作是阶乘的一种推广. 从(30)式可知 $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$.

从 $\log\Gamma(z)$ 的二阶导数可很容易地求得 Γ-函数的其他性质，对于这个二阶导数，由(29)，可得简单表达式

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z+n)^2}. \tag{31}$$

举例来说，不难看出 $\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)$ 及 $\Gamma(2z)$ 具有同样的零点，事实上，应用(31)，可得

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dz}\left(\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}\right)+\frac{d}{dz}\left(\frac{\Gamma'\left(z+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)}\right)\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z+n)^2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\left(z+n+\frac{1}{2}\right)^2}\\
&=4\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2z+2n)^2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2z+2n+1)^2}\right]\\
&=4\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2z+m)^2}=2\frac{d}{dz}\left(\frac{\Gamma'(2z)}{\Gamma(2z)}\right).
\end{aligned}$$

积分后得 $$\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)=e^{az+b}\Gamma(2z),$$

此处 a 及 b 为待定常数. 以 $z=\frac{1}{2}$ 及 $z=1$ 代入，应用已知公式:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi},\ \Gamma(1)=1$$

$$\Gamma\left(1\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\pi},\ \Gamma(2)=1,$$

于是得到 $\frac{1}{2}a+b=\frac{1}{2}\log\pi$, $a+b=\frac{1}{2}\log\pi-\log 2$. 由此得 $a=-2\log 2$, 而 $b=\frac{1}{2}\log\pi+\log 2$; 因此

$$\sqrt{\pi}\,\Gamma(2z)=2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right).$$

这一公式称为 Legendre 加倍公式.

习　　题

1. 试证明下列 Gauss 公式:

$$(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\Gamma(z)=n^{z-\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{z}{n}\right)\Gamma\left(\frac{z+1}{n}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{z+n-1}{n}\right).$$

2. 求证: $$\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)=2^{-\frac{1}{3}}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)^2.$$

3. $\Gamma(z)$在极点 $z=-n$ 处的留数是什么?

2.5 Stirling 公式

在 Γ 函数的许多应用中，最为重要的就是要了解当 z 很大时 $\Gamma(z)$的性态. 应用一个古典的公式，就可以把 $\Gamma(z)$算得很精确，而且也很省力. 这一古典公式称为 Stirling 公式，证明的方法很多. 我们这里将用留数计算法来导出这一公式，主要是根据 Lindelöf 关于留数计算的经典著作. 这是一个非常简单而有益的证明方法，它给我们提供了在稍较复杂的情形中应用留数的机会.

我们从 $\log\Gamma(z)$的二阶导数公式(31)出发，先将部分和

$$\frac{1}{z^2}+\frac{1}{(z+1)^2}+\frac{1}{(z+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(z+n)^2}$$

表成线积分．为此，需要有一个函数，它在整数点 ν 上有留数 $1/(z+\nu)^2$；最适当的是取

$$\Phi(\zeta)=\frac{\pi\cot\pi\zeta}{(z+\zeta)^2}.$$

此处 ζ 是一变数，而 z 则只作为一参数，在推导的前半部分，我们将它保持于一固定的值 $z=x+iy$，其中 $x>0$．

我们现在将留数公式应用到一个矩形上，矩形的垂直边在 $\xi=0$ 及 $\xi=n+\frac{1}{2}$ 上，而水平边则为 $\eta=\pm Y$，并先令 Y 而后令 n 趋于 ∞．令矩形的周界为 K，它通过 0 处的极点，但只要我们取积分的主值并将原点的留数的一半也算进去，则公式仍适用．因此得

$$\text{pr. v.}\ \frac{1}{2\pi i}\int_K \Phi(\zeta)d\zeta=-\frac{1}{2z^2}+\sum_{\nu=0}^{n}\frac{1}{(z+\nu)^2}.$$

在矩形的水平边上，当 $Y\to\infty$ 时，$\cot\pi\zeta$ 一致地趋于 $\pm i$．由于因子 $1/(z+\zeta)^2$ 趋于 0，故知对应积分的极限为 0．现在只剩无限垂直线上的两个积分．在 $\xi=n+\frac{1}{2}$ 的各条直线上，$\cot\pi\zeta$ 是有界的，而由于这一函数的周期性，可知它的界不依赖于 n．由此可知沿直线 $\xi=n+\frac{1}{2}$ 的积分将小于一个常数与下列积分的积，

$$\int_{\xi=n+\frac{1}{2}}\frac{d\eta}{|\zeta+z|^2}.$$

这一积分是可以计值的，因为在积分的沿线

$$\bar{\zeta}=2n+1-\zeta,$$

应用留数可得

$$\frac{1}{i}\int\frac{d\zeta}{|\zeta-z|^2}=\frac{1}{i}\int\frac{d\zeta}{(\zeta+z)\ (2n+1-\zeta+\bar{z})}=\frac{2\pi}{2n+1+2x}.$$

因此，当 $n\to\infty$ 时，极限为零．

最后，沿虚轴 $-i\infty$ 至 $+i\infty$ 段的积分主值可写成

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty \cot \pi i\eta\left[\frac{1}{(i\eta+z)^2}-\frac{1}{(i\eta-z)^2}\right]d\eta$$

$$=-\int_0^\infty \coth \pi\eta\cdot\frac{2\eta z}{(\eta^2+z^2)^2}\,d\eta.$$

符号应相反，于是得公式：

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}\right)=\frac{1}{2z^2}+\int_0^\infty \coth \pi\eta\cdot\frac{2\eta z}{(\eta^2+z^2)^2}\,d\eta. \tag{32}$$

现在最好令 $\coth \pi\eta=1+\dfrac{2}{e^{2\pi\eta}-1}$,

代入上式，从值为 1 的项所得的积分其值为 $1/z$，因此(32)可写成

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}\right)=\frac{1}{z}+\frac{1}{2z^2}+\int_0^\infty \frac{4\eta z}{(\eta^2+z^2)^2}\cdot\frac{d\eta}{e^{2\pi\eta}-1}, \tag{33}$$

这里的积分是非常迅速地收敛的.

令 z 在右半平面上变化，则这一公式可以积分．从而得到

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}=C+\log z-\frac{1}{2z}-\int_0^\infty \frac{2\eta}{\eta^2+z^2}\cdot\frac{d\eta}{e^{2\pi\eta}-1}, \tag{34}$$

式中 $\log z$ 为对数的主支而 C 为积分常数．最后一项的积分尚须加以验证．为此，必须证明(34)式中的积分可在积分号下进行微分；但这显然是可以的，因为这一积分当 z 取值于半平面 $x>0$ 中的任一紧致集上时是一致收敛的．

现在将(34)式再积分一次．此时在积分中显然将出现 $\arctan(z/\eta)$，虽然我们尽可以定义一单值分支，但多值函数的应用还是应极力避免的．要做到这一点，可先用分部积分来变换(34)中的积分．这就有

$$\int_0^\infty \frac{2\eta}{\eta^2+z^2}\cdot\frac{d\eta}{e^{2\pi\eta}-1}=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{z^2-\eta^2}{(\eta^2+z^2)^2}\log(1-e^{-2\pi\eta})d\eta,$$

此处的对数当然是实的．现在可对 z 积分，得

$$\log \Gamma(z)=C'+Cz+\left(z-\frac{1}{2}\right)\log z+\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{z}{\eta^2+z^2}\log\frac{1}{1-e^{-2\pi\eta}}\,d\eta, \tag{35}$$

此处 C' 是一新的积分常数，而且为了方便起见，我们将 $C-1$ 写成 C．这一公式表明，在右半平面上存在 $\log \Gamma(z)$ 的一个单值分支，

它的值由方程的右侧给出．如果适当选择 C'，则可得 $\log\Gamma(z)$的一分支，它在 z 为实数时取实值．

现在余下的问题就是去确定常数 C 及 C'．为此，应先研究(35)式中积分的性态，我们把这一积分记为

$$J(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{z}{\eta^2+z^2}\log\frac{1}{1-e^{-2\pi\eta}}\,d\eta. \tag{36}$$

实际上，只要 z 保持远离虚轴，则当 $z\to\infty$ 时，必有 $J(z)\to 0$．设 z 取值于半平面 $x\geqslant c>0$．将积分分为两部分，如下：

$$J(z)=\int_0^{\frac{|z|}{2}}+\int_{\frac{|z|}{2}}^\infty=J_1+J_2.$$

在第一个积分中，$|\eta^2+z^2|\geqslant|z|^2-|z/2|^2=3|z|^2/4$，因此

$$|J_1|\leqslant\frac{4}{3\pi|z|}\int_0^\infty\log\frac{1}{1-e^{-2\pi\eta}}\,d\eta.$$

在第二个积分中，$|\eta^2+z^2|=|z-i\eta|\cdot|z+i\eta|>c|z|$，因此

$$|J_2|<\frac{1}{\pi c}\int_{\frac{|z|}{2}}^\infty\log\frac{1}{1-e^{-2\pi\eta}}\,d\eta.$$

由于 $\log(1-e^{-2\pi\eta})$ 的积分显然是收敛的，故知当 $z\to\infty$ 时，J_1 及 J_2 都趋于0．

将(35)式代入函数方程 $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$，或 $\log\Gamma(z+1)=\log z+\log\Gamma(z)$之中即可求得 C 的值；如设 z 取正值，则对数的分支甚为明确．代入后得

$$C'+Cz+C+\left(z+\frac{1}{2}\right)\log(z+1)+J(z+1)$$
$$=C'+Cz+\left(z+\frac{1}{2}\right)\log z+J(z),$$

由此得 $\quad C=-\left(z+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{z}\right)+J(z)-J(z+1).$

令 $z\to\infty$，可知 $C=-1$．

其次，将(35)式应用于方程 $\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\pi/\sin\pi z$，并令 $z=\frac{1}{2}+iy$．则得

$$2C'-1+iy\log\left(\frac{1}{2}+iy\right)-iy\log\left(\frac{1}{2}-iy\right)$$
$$+J\left(\frac{1}{2}+iy\right)+J\left(\frac{1}{2}-iy\right)=\log\pi-\log\cosh\pi y.$$

上式中的对数应取主值．至此，还有 $2\pi i$ 的一个常数倍数需要确定．不过，对于 $y=0$，这一方程是成立的，因为(35)式确定了 $\log\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$的实值；由此可知它对所有的 y 成立．令 $y\to\infty$，可知 $J\left(\frac{1}{2}+iy\right)$及 $J\left(\frac{1}{2}-iy\right)$ 将趋于 0．将左边的对数展为 Taylor 级数，就得到

$$iy\log\frac{\frac{1}{2}+iy}{\frac{1}{2}-iy}=iy\left(\pi i+\log\frac{1+\frac{1}{2iy}}{1-\frac{1}{2iy}}\right)=-\pi y+1+\varepsilon_1(y),$$

而在方程的右侧，

$$\log\cosh\pi y=\pi y-\log 2+\varepsilon_2(y),$$

其中 $\varepsilon_1(y)$ 及 $\varepsilon_2(y)$ 趋于 0．从此可得 C' 的值为 $C'=\frac{1}{2}\log 2\pi$．这样，就证明了如下形式的 Stirling 公式：

$$\log\Gamma(z)=\frac{1}{2}\log 2\pi-z+\left(z-\frac{1}{2}\right)\log z+J(z), \tag{37}$$

或等价地，

$$\Gamma(z)=\sqrt{2\pi}\,z^{z-\frac{1}{2}}e^{-z}e^{J(z)}, \tag{38}$$

以及在右半平面中成立的余项表示式(36)．在半平面 $x\geqslant c>0$ 中，当 $z\to\infty$ 时，$J(z)$趋于 0．

在 $J(z)$的表达式中，我们可将被积函数展为 $1/z$ 的幂级数，得到

$$J(z)=\frac{C_1}{z}+\frac{C_2}{z^3}+\cdots+\frac{C_k}{z^{2k-1}}+J_k(z),$$

其中

$$C_\nu=(-1)^{\nu-1}\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\eta^{2\nu-2}\log\frac{1}{1-e^{-2\pi\eta}}\,d\eta, \tag{39}$$

且 $$J_k(z)=\frac{(-1)^k}{z^{2k+1}}\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{\eta^{2k}}{1+(\eta/z)^2}\log\frac{1}{1-e^{-2\pi\eta}}\,d\eta.$$

可以证明(例如，应用留数)，系数 C_ν 与 Bernoulli 数(见 1.3 节习题 4)间的关系为

$$C_\nu=(-1)^{\nu-1}\frac{1}{(2\nu-1)2\nu}B_\nu. \tag{40}$$

因此，$J(z)$的展开式变成

$$J(z)=\frac{B_1}{1\cdot2}\cdot\frac{1}{z}-\frac{B_2}{3\cdot4}\cdot\frac{1}{z^3}+\cdots$$
$$+(-1)^{k-1}\frac{B_k}{(2k-1)2k}\cdot\frac{1}{z^{2k-1}}+J_k(z). \tag{41}$$

应当注意，这一式与 Laurent 展开不能相混. 函数 $J(z)$在∞的邻域中没有定义，因此，不能有 Laurent 展开式；不仅如此，如 $k\to\infty$，从(41)式所得的级数并不收敛. 只能说，对于一个固定的 k，当 $z\to\infty$ 时表达式 $J_k(z)z^{2k}$ 趋于 0 (在半平面 $x\geqslant c>0$ 上). 根据这一特性，我们把(41)作为一个渐近展开式. 这种展开式当 z 远较 k 为大时非常有用，但对于固定的 z，在令 k 变成很大时，就没有什么方便可言.

应用 Stirling 公式可以证明下列公式：

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt, \tag{42}$$

这一式当积分收敛时正确，也就是说它对于 $x>0$ 成立. 把(42)中的积分记为 $F(z)$. 作分部积分，得到

$$F(z+1)=\int_0^\infty e^{-t}t^z dt=z\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt=zF(z).$$

因此，$F(z)$与$\Gamma(z)$满足同一函数方程，从而知 $F(z)/\Gamma(z)=F(z+1)/\Gamma(z+1)$. 换言之，$F(z)/\Gamma(z)$是周期为 1 的周期函数. 这表明，虽然积分表示式仅在一半平面中有效，但 $F(z)$ 仍可定义于整个平面.

为了证明 $F(z)/\Gamma(z)$ 是一常数，可在一周期带域(例如 $1\leqslant x\leqslant 2$)内来估计 $|F/\Gamma|$. 首先，由(42)有

$$|F(z)|\leqslant\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt=F(x),$$

因此，$F(z)$在这一带中有界. 其次，应用 Stirling 公式，对于大

的 y, 求 $|\Gamma(z)|$ 的下界. 从(37)可得

$$\log|\Gamma(z)|=\frac{1}{2}\log 2\pi-x+\left(x-\frac{1}{2}\right)\log|z|-y\arg z+\operatorname{Re}J(z).$$

在上式中, 只有项 $-y\arg z$ 变为负无穷大, 因为它可与 $-\pi|y|/2$ 相比. 故知 $|F/\Gamma|$ 不能增长得比 $e^{\pi|y|/2}$ 更快.

对于一个任意函数, 这并不足以得出结论说函数必为一常数, 但对于周期为1的函数来说, 这是很充分的. 因为, F/Γ 显然可表成一以 $\zeta=e^{2\pi iz}$ 为变数的单值函数, 每一个 $\zeta\neq 0$ 的值对应于无穷多个 z 的值, 它们的差是1的倍数, 因此对应于 F/Γ 的是同一个值. 函数在 $\zeta=0$ 及 $\zeta=\infty$ 处具有孤立奇点, 而我们的估计表明, $|F/\Gamma|$ 至多只能象 $\zeta\to 0$ 时的 $|\zeta|^{-\frac{1}{4}}$ 及 $\zeta\to\infty$ 时的 $|\zeta|^{\frac{1}{4}}$ 一样增长. 由此可知, 两个奇点都是可去的, 所以 F/Γ 必为一常数. 最后, 从 $F(1)=\Gamma(1)=1$ 的关系可知 $F(z)=\Gamma(z)$.

习　题

1. 试证明展开式(41).
2. 对于实的 $x>0$, 求证

$$\Gamma(x)=\sqrt{2\pi}\,x^{x-\frac{1}{2}}e^{-x}e^{\theta(x)/12x},$$

其中
$$0<\theta(x)<1.$$

3. 公式(42)使我们可以计算概率积分

$$\int_0^\infty e^{-t^2}dt=\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-x}x^{-\frac{1}{2}}dx=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

用这一结果连同 Cauchy 定理计算 Fresnel 积分

$$\int_0^\infty \sin(x^2)dx,\quad \int_0^\infty \cos(x^2)dx.$$

答: 两个积分都等于 $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

3 整　函　数

在2.3节我们已经讨论了整函数表为无穷乘积的表示式, 在

一些特殊情形，表为典型乘积的表示式．在这一节里，我们将研究乘积表示式与函数增长率之间的联系．这类问题是由 Hadamard 首先研究的，他把所得结果应用于他对素数定理的著名证明中．本书的篇幅不允许我们介绍这一应用，但是 Hadamard 因子分解定理的基本重要性是十分显见的．

3.1 Jensen 公式

如 $f(z)$ 为一解析函数，则 $\log|f(z)|$ 除了在 $f(z)$ 的零点以外，是调和的．因此，如 $f(z)$ 在 $|z|\leqslant\rho$ 中解析而没有零点，则

$$\log|f(0)|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(\rho e^{i\theta})|\,d\theta, \tag{43}$$

且 $\log|f(z)|$ 可用 Poisson 公式来表示．

如 $f(z)$ 在圆 $|z|=\rho$ 上有零点，则公式(43)仍成立．最简单的证明就是用对应于每一零点的一个因子 $z-\rho e^{i\theta_0}$ 去除 $f(z)$．然后只要证明

$$\log\rho=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|\rho e^{i\theta}-\rho e^{i\theta_0}|\,d\theta$$

或

$$\int_0^{2\pi}\log|e^{i\theta}-e^{i\theta_0}|\,d\theta=0$$

就够了．这一积分显然不依赖于 θ_0，因此只须证明

$$\int_0^{2\pi}\log|1-e^{i\theta}|\,d\theta=0$$

即可．但这是第 4 章 5.3 节中所证的公式(见第 4 章 6.4 节习题 5)

$$\int_0^{\pi}\log\sin x\,dx=-\pi\log 2$$

的一个推论．

现在我们来研究在 $|z|<\rho$ 内部出现零点时公式(43)的情形．把这些零点记为 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，重零点按重数重复计数，并先设 $z=0$ 不是一零点．则函数

$$F(z)=f(z)\prod_{i=1}^{n}\frac{\rho^2-\bar{a}_i z}{\rho(z-a_i)}$$

在圆盘中没有零点，而在 $|z|=\rho$ 上有 $|F(z)|=|f(z)|$. 于是得到

$$\log|F(0)|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(\rho e^{i\theta})|d\theta,$$

代入 $F(0)$ 的值，即得

$$\log|f(0)|=-\sum_{i=1}^{n}\log\left(\frac{\rho}{|a_i|}\right)+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(\rho e^{i\theta})|d\theta. \qquad (44)$$

这一公式称为 Jensen 公式. 它的重要性在于它表明了圆上的模 $|f(z)|$ 与各零点之模的关系.

如 $f(0)=0$, 则这一公式就比较复杂. 令 $f(z)=cz^h+\cdots$, 对 $f(z)(\rho/z)^h$ 应用公式(44)，可知其左边应以 $\log|c|+h\log\rho$ 代替.

Poisson 公式有一个类似的推广. 为此，只须对 $\log|F(z)|$ 应用一般的 Poisson 公式. 只要 $f(z)\neq 0$, 就得到

$$\log|f(z)|=-\sum_{i=1}^{n}\log\left|\frac{\rho^2-\bar{a}_i z}{\rho(z-a_i)}\right|$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{Re}\frac{\rho e^{i\theta}+z}{\rho e^{i\theta}-z}\log|f(\rho e^{i\theta})|d\theta. \qquad (45)$$

等式(45)常称为 Poisson-Jensen 公式.

严格说来，上面的证明仅当 f 在 $|z|=\rho$ 上 $\neq 0$ 时有效. 但(44)式表明右侧的积分是 ρ 的一个连续函数，从此就不难肯定(45)中的积分也是连续的. 因此，在一般情形，可令 ρ 趋近于一极限而导出(45)式.

Jensen 公式及 Poisson-Jensen 公式在整函数理论中有很重要的应用.

3.2 Hadamard 定理

设 $f(z)$ 为一整函数，其零点记为 a_n; 为了简单起见，设 $f(0)\neq 0$. 在前面我们已经定义过，整函数 $f(z)$ 的亏格(2.3 节)就是使 $f(z)$ 能表成下列形式的最小整数 h:

$$f(z)=e^{g(z)}\prod_n\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{\frac{z}{a_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{h}\left(\frac{z}{a_n}\right)^h}, \qquad (46)$$

此处 $g(z)$ 为一多项式，其次数 $\leqslant h$. 如果没有这样一个表示式，那

末亏格就是无穷大.

将 $|f(z)|$ 在 $|z|=r$ 上的极大值记为 $M(r)$. 整函数 $f(z)$ 的级(order)定义为

$$\lambda=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log\log M(r)}{\log r}.$$

根据这一定义可知, λ 就是满足下列条件的最小的数, 这条件是: 对于任一给定的 $\varepsilon>0$, 只要 r 充分大,就有

$$M(r)\leqslant e^{r^{\lambda+\varepsilon}} \tag{47}$$

成立.

整函数的亏格与级是紧密地联系着的,这可从下述定理看出:

定理 8 一个整函数的亏格与级满足双不等式 $h\leqslant\lambda\leqslant h+1$.

先设 $f(z)$ 具有有限的亏格 h. 公式(46)中的指数因子的次数显然 $\leqslant h$, 而一个乘积的次数又不能大于各因子之次数的总和. 因此只要证明典型乘积的次数 $\leqslant h+1$ 就够了. 典型乘积的收敛性蕴涵着 $\sum\limits_n|a_n|^{-h-1}<\infty$; 这就是主要的假设.

把典型乘积记为 $P(z)$, 各别因子记为 $E_h(z/a_n)$, 此处

$$E_h(u)=(1-u)e^{u+\frac{1}{2}u^2+\cdots+\left(\frac{1}{h}\right)u^h},$$

并应理解, $E_0(u)=1-u$. 我们就是要证明,对于所有的 u, 有如下的不等式成立:

$$\log|E_h(u)|\leqslant(2h+1)|u|^{h+1}. \tag{48}$$

如 $|u|<1$, 则由幂级数展开式可得

$$\log|E_h(u)|\leqslant\frac{|u|^{h+1}}{h+1}+\frac{|u|^{h+2}}{h+2}+\cdots\leqslant\frac{1}{h+1}\frac{|u|^{h+1}}{1-|u|},$$

因此,有

$$(1-|u|)\log|E_h(u)|\leqslant|u|^{h+1}. \tag{49}$$

对于任意的 u 及 $h\geqslant1$, 有

$$\log|E_h(u)|\leqslant\log|E_{h-1}(u)|+|u|^h. \tag{50}$$

(48)式可用归纳法来证: 对于 $h=0$; 只须注意 $\log|1-u|\leqslant\log(1+|u|)\leqslant u$. 设(48)式在以 $h-1$ 代 h 时成立,就是说,

$$\log|E_{h-1}(u)|\leqslant(2h-1)|u^h|. \tag{51}$$

从(50)和(51)可知，$\log|E_h(u)|\leqslant 2h|u|^h$，而如果$|u|\geqslant 1$，这就蕴涵着(48)．但如果$|u|<1$，我们仍可用(49)，结合(50)和(51)得到

$$\log|E_h(u)|\leqslant|u|\log|E_{h-1}(u)|+2|u|^{h+1}\leqslant(2h+1)|u|^{h+1}.$$

这就完成了归纳证明．

由估计式(48)立即可得

$$\log|P(z)|=\sum_n\log\left|E_h\left(\frac{z}{a_n}\right)\right|\leqslant(2h+1)|z|^{h+1}\sum_n|a_n|^{-h-1},$$

由此可知 $P(z)$至多是 $h+1$ 级的．

对于反向的不等式，假设$f(z)$的级λ是有限的，并令 h 为 $\leqslant\lambda$ 的最大整数．则 $h+1>\lambda$，我们首先所应证明的就是 $\sum_n|a_n|^{-h-1}$ 收敛．在这个证明中就要用到 Jensen 公式．

以 $\nu(\rho)$表示零点 a_n，$|a_n|\leqslant\rho$，的数目．为了求得 $\nu(\rho)$ 的一个上界，可应用公式(44)，以 2ρ 代 ρ，并在 $|a_n|\geqslant\rho$ 时略去项 $\log(2\rho/|a_n|)$，于是得

$$\nu(\rho)\log 2\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(2\rho e^{i\theta})|d\theta-\log|f(0)|. \tag{52}$$

根据(47)可知，对于每一个 $\varepsilon>0$，必有 $\lim\limits_{\rho\to\infty}\nu(\rho)\rho^{-\lambda-\varepsilon}=0$．

现在设零点 a_n 按绝对值的大小排列，如 $|a_1|\leqslant|a_2|\leqslant\cdots\leqslant|a_n|\leqslant\cdots$．则显然有 $n\leqslant\nu(|a_n|)$，而从某一 n 开始，必有

$$n\leqslant\nu(|a_n|)<|a_n|^{\lambda+\varepsilon}.$$

按照这一不等式就可知级数 $\sum_n|a_n|^{-h-1}$ 的强级数为

$$\sum_n n^{-\frac{h+1}{\lambda+\varepsilon}},$$

如选择一个 ε，使 $\lambda+\varepsilon<h+1$，则强级数收敛．这样一来，我们就证明了$f(z)$可写成(46)的形式，其中，$g(z)$到目前为止只知是一个整函数．

下面我们来证明 $g(z)$是一个次数 $\leqslant h$ 的多项式．为此，最好应用 Poisson-Jensen 公式．对恒等式(45)的两边作运算$(\partial/\partial x)-i(\partial/\partial y)$，得

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\sum_1^{\nu(\rho)}(z-a_n)^{-1}+\sum_1^{\nu(\rho)}\bar{a}_n(\rho^2-\bar{a}_n z)^{-1}$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}2\rho e^{i\theta}(\rho e^{i\theta}-z)^{-2}\log|f(\rho e^{i\theta})|d\theta.$$

对 z 微分 h 次后可得

$$D^{(h)}\frac{f'(z)}{f(z)}=-h!\sum_1^{\nu(\rho)}(a_n-z)^{-h-1}+h!\sum_1^{\nu(\rho)}\bar{a}_n^{h+1}(\rho^2-\bar{a}_n z)^{-h-1}$$

$$+(h+1)!\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}2\rho e^{i\theta}(\rho e^{i\theta}-z)^{-h-2}\log|f(\rho e^{i\theta})|d\theta. \tag{53}$$

现在令 ρ 趋于 ∞. 为了估计(53)中的积分，首先注意到

$$\int_0^{2\pi}\rho e^{i\theta}(\rho e^{i\theta}-z)^{-h-2}d\theta=0.$$

因此，如果从 $\log|f|$ 减去 $\log M(\rho)$，那就不会有什么改变. 如果 $\rho>2|z|$，则对于 $\log M(\rho)/|f(\rho e^{i\theta})|\geqslant 0$，(53)中最后一项的模至多等于

$$(h+1)!2^{h+3}\rho^{-h-1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\frac{M(\rho)}{|f(\rho e^{i\theta})|}d\theta.$$

但是由 Jensen 公式，

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f|d\theta\geqslant\log|f(0)|,$$

而且 $\rho^{-h-1}\log M(\rho)\to 0$，因为 $\lambda<h+1$. 由此得出结论：(53)中的积分趋于 0.

至于(53)中的第二个和，由同一不等式 $\rho>2|z|$ 连同 $|a_n|\leqslant\rho$ 就知每一项的绝对值小于 $(2/\rho)^{h+1}$，整个和的模至多等于 $2^{h+1}\nu(\rho)\rho^{-h-1}$，而我们已经证明了这是趋于 0 的，因此得到

$$D^{(h)}\frac{f'(z)}{f(z)}=-h!\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-z)^{-h-1}. \tag{54}$$

令 $f(z)=e^{g(z)}P(z)$，得到

$$g^{(h+1)}(z)=D^{(h)}\frac{f'}{f}-D^{(h)}\frac{P'}{P}.$$

不过，根据 Weierstrass 定理，$D^{(h)}(P'/P)$ 可从每个因子分开微分而求得，这样，所得的恰好就是(54)的右端. 因此，$g^{(h+1)}(z)$ 恒等于

零，而 $g(z)$ 必为次数 $\leqslant h$ 的多项式. 于是定理 8 得证.

这定理是有限级 λ 的整函数的一个因子分解定理. 如果 λ 不是整数，则这亏格 h，从而这个积的形式是唯一确定的. 如果级是整数，则不确定.

下面的系表明了 Hadamard 定理的力量:

系 一个分数级的整函数取每一个有穷值无限多次.

显见 f 和 $f-a$ 对任一常数 a 具有相同的级. 所以只须证明 f 具有无穷多个零点. 如果 f 只有有限多个零点，则经除以一个多项式而得到一个没有零点的同级函数. 根据定理，它必有形式 e^g，其中 g 是一个多项式. 但是很明显，e^g 的级恰好是 g 的次数，因此是一个整数. 由这一矛盾就证明了系.

习 题

1. 3.2 节第一段中给出的亏格的特征从文字上看与 2.3 节中的定义不一样，为了看出条件的等价性，试补充必要的推理.

2. 假设 $f(z)$ 的亏格为零，因而

$$f(z)=z^m\prod_n\left(1-\frac{z}{a_n}\right).$$

试将 $f(z)$ 与

$$g(z)=z^m\prod_n\left(1-\frac{z}{|a_n|}\right)$$

进行比较. 并证明最大模 $\max\limits_{|z|=r}|f(z)|\leqslant g$ 的最大模，并证明 f 的最小模 $\geqslant g$ 的最小模.

4 Riemann ζ-函数

级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{-\sigma}$ 对于所有大于等于固定 $\sigma_0>1$ 的实数 σ 是一致收敛的. 它是级数

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-s}\quad(s=\sigma+it)\tag{55}$$

的强级数，因此它表示半平面 $\operatorname{Re}s>1$ 中 s 的一个解析函数(见

1.1 节习题 2；在这里记号 $s=\sigma+it$ 是按惯例).

函数 $\zeta(s)$ 称为 Riemann ζ-函数. 它在复分析对数论的应用中起着中心的作用. 在本书中，即使介绍少量的这些应用也将引导我们走得过远，但是我们能够而且应该使读者熟悉 ζ-函数的某些较初等的性质.

4.1 乘积展开

$\zeta(s)$ 的数论性质是 ζ-函数与素数上升序列 $p_1, p_2, \cdots, p_n, \cdots$ 之间的下列联系中所固有的.

定理 9 对于 $\sigma=\operatorname{Re} s>1$,

$$\frac{1}{\zeta(s)}=\prod_{n=1}^{\infty}(1-p_n^{-s}). \tag{56}$$

根据定理 6, 对于 $\sigma\geqslant\sigma_0>1$, 如果级数 $\sum_1^{\infty}|p_n^{-s}|=\sum_1^{\infty}p_n^{-\sigma}$ 一致收敛, 则这个无穷乘积也一致收敛. 因为前者是从 $\sum_1^{\infty}n^{-\sigma}$ 略去一些项而得到, 它对 $\sigma\geqslant\sigma_0$ 一致收敛是显然的.

在条件 $\sigma>1$ 之下, 立刻可见

$$\zeta(s)(1-2^{-s})=\sum n^{-s}-\sum(2n)^{-s}=\sum m^{-s},$$

其中 m 取遍奇整数. 同理,

$$\zeta(s)(1-2^{-s})(1-3^{-s})=\sum m^{-s},$$

其中的 m 现在取所有不能被 2 或 3 整除的整数. 更一般地,

$$\zeta(s)(1-2^{-s})(1-3^{-s})\cdots(1-p_N^{-s})=\sum m^{-s}, \tag{57}$$

右端的和取遍所有不包含素因子 2, 3, $\cdots$, p_N 的整数. 和中的第一项是 1, 第二项是 p_{N+1}^{-s}. 所以, 除了第一项之外的所有项的和在 $N\to\infty$ 时趋于零, 于是

$$\lim_{N\to\infty}\zeta(s)\prod_{n=1}^{N}(1-p_n^{-s})=1.$$

这就证明了定理.

我们认为有无穷多个素数是当然的. 实际上, 可用推理来证明这一事实. 因为如果 p_N 是最大素数, 则(57)将变成

$$\zeta(s)(1-2^{-s})(1-3^{-s})\cdots(1-p_N^{-s})=1,$$

于是推出当 $\sigma\to 1$ 时，$\zeta(\sigma)$ 具有一个有穷极限．这与 $\sum_1^\infty n^{-1}$ 的发散矛盾．

4.2 $\zeta(s)$ 扩张到整个平面

我们回忆起，对于 $\sigma>1$，

$$\Gamma(s)=\int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}dx$$

(2.5 节(42))．在积分中，以 nx 代 x，得到

$$n^{-s}\Gamma(s)=\int_0^\infty x^{s-1}e^{-nx}dx,$$

关于 n 求和，得到

$$\zeta(s)\Gamma(s)=\int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x-1}dx. \tag{58}$$

由于 $\sigma>1$，所以积分在两端是绝对收敛的，这就验证了积分与求和可以交换．注意，x^{s-1} 明确地定义为 $e^{(s-1)\log x}$.

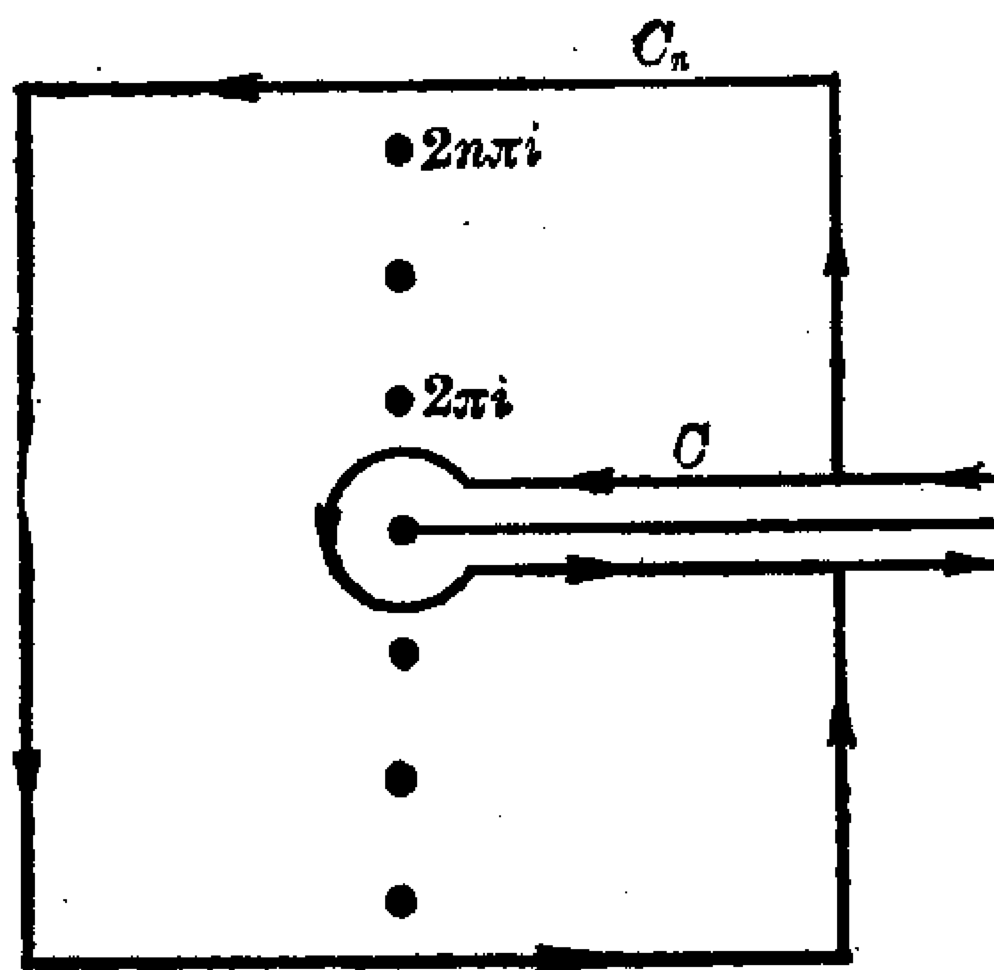


图 5-1

图 5-1 表明两条无穷路径 C 与 C_n，它们的起点和终点都在正实轴附近．暂时我们只考虑 C，它的精确形状无关紧要，只要中心在原点的圆的半径 $r<2\pi$.

定理 10 对于 $\sigma>1$，有

$$\zeta(s)=-\frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i}\int_C \frac{(-z)^{s-1}}{e^z-1}dz, \tag{59}$$

其中 $(-z)^{s-1}=e^{(s-1)\log(-z)}$ 定义在正实轴的余集上，且

$$-\pi<\mathrm{Im}\log(-z)<\pi.$$

积分显然是收敛的．根据 Cauchy 定理，只要 C 不缠绕 $2k\pi i$ (k 是整数)，它的值就不依赖于 C 的形状．特别，我们完全可以让 r 趋于零．不难看出，沿着圆周的积分随 r 趋于零．我们只剩下

一个沿着正实轴来回的积分．在上方的边缘上，$(-z)^{s-1}=x^{s-1}e^{-(s-1)\pi i}$，在下方的边缘上，$(-z)^{s-1}=x^{s-1}e^{(s-1)\pi i}$．我们得到

$$\int_C \frac{(-z)^{s-1}}{e^z-1}dz=-\int_0^\infty \frac{x^{s-1}e^{-(s-1)\pi i}}{e^x-1}dx+\int_0^\infty \frac{x^{s-1}e^{(s-1)\pi i}}{e^x-1}dx$$

$$=2i\sin(s-1)\pi\zeta(s)\Gamma(s).$$

由于 $\sin(s-1)\pi=-\sin s\pi$，且 $\Gamma(s)\Gamma(1-s)=\pi/\sin s\pi$(2.4 节，(30))，所以上式就蕴涵着(59)．

公式(59)的重要性在于：右端对 s 的所有值有定义且为半纯，因而这公式可用来将 $\zeta(s)$ 扩张为整个平面中的一个半纯函数．事实上非常明显，(59)中的积分是 s 的一个整函数，而 $\Gamma(1-s)$ 是半纯的，极点在 $s=1, 2, \cdots$．由于 $\zeta(s)$ 已知对 $\sigma>1$ 解析，所以在整数 $n\geqslant 2$ 上的极点必然与积分的零点相抵消．在 $s=1$，$-\Gamma(1-s)$ 具有一个单极点，留数为 1，这可从 2.4 节的(29)看出．另一方面，由留数有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{dz}{e^z-1}=1,$$

因此 $\zeta(s)$ 具有留数 1．由此结果推出下列的系：

系 ζ-函数可以扩张成整个平面中的一个半纯函数，它的唯有的极点是 $s=1$ 处的单极点，其留数为 1．

在负整数和零上的值 $\zeta(-n)$ 可以明显地计算．注意展开式(1.3 节习题 4)

$$\frac{1}{e^z-1}=\frac{1}{z}-\frac{1}{2}+\sum_1^\infty(-1)^{k-1}\frac{B_k}{(2k)!}z^{2k-1}. \tag{60}$$

从(59)，

$$\zeta(-n)=(-1)^n\frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{z^{-n-1}}{e^z-1}dz,$$

因此 $\zeta(-n)$ 等于(60)中 z^n 的系数乘以 $(-1)^n n!$，我们可以给出下列值：$\zeta(0)=-\frac{1}{2}$，$\zeta(-2m)=0$，$\zeta(-2m+1)=(-1)^m B_m/2m$，其中 m 为正整数．点 $-2m$ 称为 ζ-函数的平凡零点．

4.3 函数方程

在半平面 $\sigma>1$ 中 ζ-函数由级数(55)明显地给出，因此它受

制于估值 $|\zeta(s)|\leqslant\zeta(\sigma)$. Riemann 认识到，在 $\zeta(s)$ 和 $\zeta(1-s)$ 之间存在一种相当简单的关系．因此，在半平面 $\sigma<0$ 中，ζ-函数的性态也是很好控制的．

我们抄录通称为**函数方程**的标准证明之一于下：

定理 11

$$\zeta(s)=2^s\pi^{s-1}\sin\frac{\pi s}{2}\,\Gamma(1-s)\zeta(1-s). \tag{61}$$

为了证明，我们用图 5-1 中的路径 C_n；假定正方形部分位于直线 $t=\pm(2n+1)\pi$ 和 $\sigma=\pm(2n+1)\pi$ 上，闭链 C_n-C 环绕点 $\pm 2m\pi i$, $m=1, \cdots, n$ 的环绕次数为 1．在这些点上，函数 $(-z)^{s-1}/(e^z-1)$ 有单极点，其留数为 $(\mp 2m\pi i)^{s-1}$．由此可知

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n-C}\frac{(-z)^{s-1}}{e^z-1}dz&=\sum_{m=1}^{n}[(-2m\pi i)^{s-1}+(2m\pi i)^{s-1}]\\&=2\sum_{m=1}^{n}(2m\pi)^{s-1}\sin\frac{\pi s}{2}.\end{aligned} \tag{62}$$

将 C_n 分为 $C_n'+C_n''$，其中 C_n' 是在正方形上的部分，而 C_n'' 是在正方形外的部分．易见 $|e^z-1|$ 在 C_n' 上不小于一个不依赖于 n 的固定的正常数，而 $|(-z)^{s-1}|$ 不超过 $n^{\sigma-1}$ 的一个倍数．C_n' 的长度是 n 阶的，故对某常数 A，有

$$\left|\int_{C_n'}\frac{(-z)^{s-1}}{e^z-1}dz\right|\leqslant An^{\sigma}.$$

若 $\sigma<0$，则沿 C_n' 的积分当 $n\to\infty$ 时趋于零，而沿 C_n'' 的积分当然也是如此．因此，沿 C_n-C 的积分将趋于沿 $-C$ 的积分，由定理 10，(62)左端趋于 $\zeta(s)/\Gamma(1-s)$.

在关于 σ 的同一条件下，级数 $\sum\limits_{1}^{\infty}m^{s-1}$ 收敛于 $\zeta(1-s)$，(62)右端的极限是 $\zeta(1-s)$ 的一个倍数．这些极限的相等直接导致方程(61)，这样就在 $\sigma<0$ 下对所有的 s 证明了(61)．但是两个在一非空开集上一致的半纯函数必是恒等的．因此(61)对所有的 s 正确．

函数方程有一些等价的形式．例如，如用恒等式 $\Gamma(s)\Gamma(1-s)=\pi/\sin\pi s$，则(61)蕴涵着

$$\zeta(1-s)=2^{1-s}\pi^{-s}\cos\frac{\pi s}{2}\,\Gamma(s)\zeta(s). \tag{63}$$

定理 11 的内容也可表述为如下形式:

系 函数

$$\xi(s)=\frac{1}{2}s(1-s)\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$$

是整函数并满足 $\xi(s)=\xi(1-s)$.

$\xi(s)$为整函数是明显的, 因为因子 $1-s$ 抵消了 $\zeta(s)$ 的极点, 而 $\Gamma(s/2)$的极点抵消了 $\zeta(s)$的平凡零点. 应用(63), 可把 $\xi(s)=\xi(1-s)$写成

$$\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)=\pi^{(s-1)/2}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s)$$

$$=2^{1-s}\pi^{-(s+1)/2}\Gamma(s)\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\cos\frac{\pi s}{2},$$

这等同于 $\cos\frac{\pi s}{2}\,\Gamma(s)\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)=2^{s-1}\pi^{1/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$.

由于 $$\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+s}{2}\right)=\pi/\cos\pi s/2,$$

故上式就等价于

$$\pi^{1/2}\Gamma(s)=2^{s-1}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+s}{2}\right),$$

而这不过是 Legendre 的加倍公式(2.4 节). 于是系得证.

$\xi(s)$的级是什么? 由于 $\xi(s)=\xi(1-s)$, 故只要对 $\sigma\geqslant\frac{1}{2}$ 估计 $|\xi(s)|$ 就可以了. 从 Stirling 公式(2.5 节, (37))易见, 对于常数 A 与大的 $|s|$, 有 $\log|\Gamma(s/2)|\leqslant A|s|\log|s|$, 而这一估值对于 s 的实值是精确成立的. 因此, 如果可以证明 $|\zeta(s)|$ 当 $\sigma\geqslant\frac{1}{2}$ 时相对地小, 就可推出它的级是 1.

我们用标准的记号$[x]$表示 $\leqslant x$ 的最大整数. 先设 $\sigma>1$, 读者不难验证下面的计算:

$$\int_N^\infty [x]x^{-s-1}dx = \sum_N^\infty n\int_n^{n+1} x^{-s-1}dx = s^{-1}\sum_N^\infty n(n^{-s}-(n+1)^{-s})$$

$$= s^{-1}\left[N^{-s+1}+\sum_{N+1}^\infty n^{-s}\right].$$

由此得到

$$\zeta(s)=\sum_1^N n^{-s}+\frac{1}{s-1}N^{1-s}-s\int_N^\infty (x-[x])x^{-s-1}dx. \qquad (64)$$

以上是对 $\sigma>1$ 证明的,但对 $\sigma>0$, 右端的积分收敛, 所以等式对 $\sigma>0$ 仍保持正确, 顺便提一下, (64)在 $s=1$ 处有极点, 其留数为 1.

如果 $\sigma\geqslant\frac{1}{2}$, (64)产生如下形式的一个估值:

$$|\zeta(s)|\leqslant N+A|N|^{-1/2}|s|.$$

它对大的 $|s|$ 正确,其中 A 不依赖于 s 和 N. 选取 N 为最接近于 $|s|^{2/3}$ 的整数, 就知 $|\zeta(s)|$ 为 $|s|^{2/3}$ 的一个常数倍数所界. 所以这个因子并不影响 $\zeta(s)$ 的级.

4.4 ζ-函数的零点

从乘积展开(56)可知, $\zeta(s)$ 在半平面 $\sigma>1$ 内没有零点. 根据这一点, 由函数方程可知, 在半平面 $\sigma<0$ 内的唯有的零点都是平凡零点,换言之,所有非平凡零点都位于所谓的临界带 (critical strip) $0\leqslant\sigma\leqslant1$ 内. 著名的 Riemann 猜测说, 所有非平凡零点位于临界直线 $\sigma=\frac{1}{2}$ 上. 这个猜测到现在没有证明, 也没有反证. 不难证明在 $\sigma=1$ 和 $\sigma=0$ 上没有零点. 现在已经知道,渐近地有三分之一以上的零点位于临界直线上●.

设 $N(T)$ 为零点数, $0\leqslant t\leqslant T$. 我们不加证明地引录下式供读者参考:

$$N(T)=\frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi}-\frac{T}{2\pi}+O(\log T).$$

● 由 Norman Levinson 在 1975 年证明.

5 正 规 族

在第 3 章第 1 节中我们已经使读者熟悉了把一个函数看作空间一点的想法. 因而在原则上, 点集与函数集之间就没有差别. 为了在这二者之间作一个显著的区别, 我们把函数的集合称为函数族, 通常我们总假设同一族中的所有函数都定义在同一集上.

我们首先关心的是定义在一个固定域上的解析函数族. 重要的例子是: 有界解析函数族, 不二次取同一值的函数族等等. 目的是研究在这些函数族内的收敛性质.

5.1 等度连续性

虽然我们主要关心的是解析函数, 但是选一个更一般的出发点是有利的. 这就是, 对于在任一度量空间中取值的函数族, 我们的基本定理是正确的, 并且是同样容易证明的.

作为一个基本假设, 令 $\mathscr{F}$ 表示函数 f 的族, 这些函数定义在复平面的一个固定的域 Ω 上, 并取值于度量空间 S. 象在第 3 章第 1 节中一样, S 中的距离函数记为 d.

我们的兴趣是 $\mathscr{F}$ 中的函数组成的序列 $\{f_n\}$ 的收敛性. 我们没有特殊的理由希望序列 $\{f_n\}$ 一定收敛; 相反, 更有可能会遇到相反的极端情形, 就是序列并不包含任何收敛的子序列. 在很多场合, 后一种可能性的出现是一个严重的障碍, 因此, 下面考察的目的, 是要找出一些条件, 反映这类性态的规律

我们回忆一下一个取值于度量空间中的函数 f 的连续性定义. 根据定义, f 在 z_0 连续是指: 对于任一 $\varepsilon>0$, 存在一个 $\delta>0$, 使得只要 $|z-z_0|<\delta$, 就有 $d(f(z), f(z_0))<\varepsilon$. 如果可取 δ 不依赖于 z_0, 则称 f 是一致连续的. 但在函数族的情形, 还有另外一类一致性, 即是否可取 δ 不依赖于 f. 我们选取 δ 来满足这两方面的要求, 这样就引导到下列定义:

定义 1 族 $\mathscr{F}$ 中的函数称为在集合 $E\in\Omega$ 上是等度连续的,

当且仅当对于每一个 $\varepsilon>0$, 存在一个 $\delta>0$, 使得只要 z_0 与 $z\in E$, $|z-z_0|<\delta$, 同时对于所有的函数 $f\in\mathscr{F}$, 都成立 $d(f(z), f(z_0))<\varepsilon$.

注意，据这一定义，在一个等度连续族中每一 f 本身是在 E 上一致连续的.

现在回到收敛子序列的问题. 我们的第二个定义用来刻划具有正规性态的族:

定义 2 族 $\mathscr{F}$ 称为在 Ω 内是正规的，如果函数 $f_n\in\mathscr{F}$ 的任一序列 $\{f_n\}$ 包含一个在 Ω 的任一紧致子集上一致收敛的子序列.

这一定义并不要求收敛子序列的极限函数都是 $\mathscr{F}$ 中的函数.

5.2 正规性和紧致性

读者应该注意到正规性与 Bolzano-Weierstrass 性质(第 3 章定理 7)之间的紧密相似性. 为使从相似性更进一步，我们需要在函数空间上定义一种距离(组成这种空间的函数定义在 Ω 上，取值于 S 中)，使得关于这一距离的收敛性应当与紧致集上的一致收敛性有完全相同的意义.

为此目的，我们首先需要 Ω 的一种用紧致集 $E_k\subset\Omega$ 的增序列来实现的穷举(exhaustion). 这是指: Ω 的每一紧致子集 E 应包含在一个 E_k 中. 构造有很多可能的方法: 为具体起见，设 E_k 是由 Ω 中所有与中心距离 $\leqslant k$ 而至边界 $\partial\Omega$ 距离 $\geqslant 1/k$ 的点组成. 显见每一 E_k 是有界闭集，因此是紧致集. 任一紧致集 $E\subset\Omega$ 是有界的，并且到 $\partial\Omega$ 有正的距离，所以它包含在一个 E_k 中.

设 f 与 g 是定义在 Ω 上而取值于 S 中的任意两个函数. 我们要定义这两个函数之间的一个距离 $\rho(f, g)$，但不要与它们的值之间的距离 $d(f(z), g(z))$ 相混淆. 为此，先将 d 换成距离函数

$$\delta(a, b)=\frac{d(a, b)}{1+d(a, b)},$$

这函数也满足三角不等式，并且具有有界的优点(第 3 章第 1.2 节习题 1). 其次，令

$$\delta_k(f,\ g)=\sup_{z\in E_k}\delta(f(z),\ g(z)),$$

它可以看作 E_k 上 f 与 g 之间的距离．最后，采用定义

$$\rho(f,\ g)=\sum_{k=1}^{\infty}\delta_k(f,\ g)2^{-k}. \tag{65}$$

容易验证 $\rho(f,\ g)$ 是有穷的，并且满足距离函数所应满足的所有条件(第 3 章第 1.2 节)．

距离 $\rho(f,\ g)$ 具有我们期待的性质．首先假设在 ρ-距离的意义下 $f_n\to f$．于是对于大的 n，有 $\rho(f_n,\ f)<\varepsilon$，因此，由(65)，有 $\delta_k(f_n,\ f)<2^k\varepsilon$．这意味着在 E_k 上一致地成立 $f_n\to f$，先是关于 δ-度量的，因此也是关于 d-度量的．由于每一个紧致的 E 包含于一个 E_k 之中，故知在 E 上收敛是一致的．

反之，设 f_n 在每一紧致集上一致收敛到 f．则对任一 k，有 $\delta_k(f_n,\ f)\to 0$，而由于级数 $\sum\delta_k(f_n,\ f)2^{-k}$ 有一个收敛的强级数，其项不依赖于 n，故不难推知(如在 Weierstrass M 检验法中) $\rho(f_n,\ f)\to 0$．

我们已经证明关于距离 ρ 的收敛性等价于紧致集上的收敛性．迄今为止，我们没有假设 S 是完备的，但如果 S 是完备的，则易知所有取值于 S 中的函数组成的空间就象距离为 ρ 的度量空间一样是完备的．

有理由可以说，我们已经引进的度量是任意的、人为的．然而，从我们已经证明的可知，开集与构造中涉及的选择无关．换言之，拓扑具有一种内蕴的意义，适合于解析函数理论的需要．

现在回忆一下 Bolzano-Weierstrass 定理，根据这一定理，为使一个度量空间是紧致的，必须而且只须每一个无穷的序列具有一个收敛的子序列(第 3 章，定理 7)．将这一定理应用于装备了距离 ρ 的集合 $\mathscr{F}$，就得出结论：$\mathscr{F}$ 是紧致的当且仅当 $\mathscr{F}$ 是正规的，而且极限函数本身属于 $\mathscr{F}$．另一方面，如果 $\mathscr{F}$ 是正规的，则它的闭包 $\mathscr{F}^-$ 也是正规的．于是得到刻划正规族的特征如下：

定理 12　为要族 $\mathscr{F}$ 是正规的，其充分必要条件是：它的闭包 $\mathscr{F}^-$ 关于距离函数(65)是紧致的．

习惯上，若 $\mathscr{F}^-$ 是紧致的，则称 $\mathscr{F}$ 是**相对紧致的**．这样，正规族和相对紧致族是一回事．

现在我们把正规族概念同全有界概念联系起来．若 $\mathscr{F}$ 是正规的，则 $\mathscr{F}^-$ 是紧致的，而根据第 3 章定理 6，$\mathscr{F}^-$ 是全有界的，因此 $\mathscr{F}$ 也是全有界的(见第 62 页的脚注)．按定义，这意味着，对任一 $\varepsilon>0$，存在有穷多个函数 $f_1, \cdots, f_n \in \mathscr{F}$，使得每一个 $f\in\mathscr{F}$，对某个 f_j，成立 $\rho(f, f_j)>\varepsilon$．反过来，如果 $\mathscr{F}$ 是全有界的，则 $\mathscr{F}^-$ 亦然．若已知 S 是完备的，则 $\mathscr{F}^-$ 也是完备的，因而是紧致的．换言之，若 S 完备．则 $\mathscr{F}$ 正规的充要条件为它是全有界的．

下面的定理用 S 上的原来度量而不是用辅助度量 ρ 来叙述全有界的条件．

定理 13 为要族 $\mathscr{F}$ 是全有界的，必须而且只须对每一个紧致集 $E\subset\Omega$ 和每一个 $\varepsilon>0$，可以找到 $f_1, \cdots, f_n\in\mathscr{F}$，使得每一 $f\in\mathscr{F}$，在 E 上对某个 f_j 成立 $d(f, f_j)<\varepsilon$．

设 $\mathscr{F}$ 是全有界的，则存在 $f_1, \cdots, f_n$，使得对于任一 $f\in\mathscr{F}$，$\rho(f, f_j)<\varepsilon$ 对某个 f_j 成立．由(65)，这蕴涵着在 E_k 上 $\delta_k(f, f_j)<2^k\varepsilon$，或 $\delta(f, f_j)<2^k\varepsilon$．如果预先固定 k，因而能使 $\delta(f, f_j)$ 在 E_k 上任意小，则 $d(f, f_j)$ 也能任意小．这证明了条件的必要性．

为证充分性，取 k_0 使 $2^{-k_0}<\varepsilon/2$．依假设，可以找到 $f_1, \cdots, f_n$，使得任一 $f\in\mathscr{F}$ 在 E_{k_0} 上至少满足一个不等式 $\delta(f, f_j)\leqslant d(f, f_j)<\varepsilon/2k_0$．由此可知，对于 $k\leqslant k_0$，有 $\delta_k(f, f_j)<\varepsilon/2k_0$，而对于 $k>k_0$，有 $\delta_k(f, f_j)<1$．从(65)得

$$\begin{aligned}\rho(f, f_j)&<k_0(\varepsilon/2k_0)+2^{-k_0-1}+2^{-k_0-2}+\cdots\\&=\varepsilon/2+2^{-k_0}<\varepsilon,\end{aligned}$$

这正是需要证明的．

5.3 Arzela 定理

现在我们来研究定义 1 与定义 2 之间的关系．它们之间是由一条著名的极为有用的定理称为 Arzela 定理(或称 Arzela-Ascoli 定理)相联系的．

定理 14 取值于度量空间 S 的连续函数族 $\mathscr{F}$ 在复平面区域 Ω 中是正规的，当且仅当

(i) $\mathscr{F}$ 在任一紧致集 $E\subset\Omega$ 上等度连续；

(ii) 对任何 $z\in\Omega$，值 $f(z)$，$f\in\mathscr{F}$ 位于 S 的一个紧致子集中.

我们给出(i)的必要性的两种证明. 设 $\mathscr{F}$ 是正规的，象在定理 13 中一样，确定 $f_1, \cdots, f_n$. 由于这些函数的每一个在 E 上一致连续，故可找到一个 $\delta>0$，使得对于 z_1、$z_0\in E$，$|z-z_0|<\delta$，就有 $d(f_j(z),\ f_j(z_0))<\varepsilon$，$j=1, \cdots, n$. 对于任何给定的 $f\in\mathscr{F}$ 和对应的 f_j 我们得到

$$d(f(z),\ f(z_0))\leqslant d(f(z),\ f_j(z))+d(f_j(z),\ f_j(z_0))\\+d(f_j(z_0),\ f(z_0))<3\varepsilon.$$

于是(i)得证.

另一种不是那么精致但不用定理 13 的证明如下：若 $\mathscr{F}$ 在 E 上不是等度连续的，则存在一个 $\varepsilon>0$，点列 z_n、$z_n'\in E$ 和函数 $f_n\in\mathscr{F}$，使得对所有的 n，当 $d(f_n(z_n),\ f_n(z_n'))\geqslant\varepsilon$ 时，有 $|z_n-z_n'|\to0$. 由于 E 是紧致的，故可取 $\{z_n\}$ 和 $\{z_n'\}$ 的子序列，它们收敛于同一极限 $z''\in E$，又由于 $\mathscr{F}$ 是正规的，故存在 $\{f_n\}$ 的一个子序列，在 E 上一致收敛. 显然，我们可以取所有三个子序列使之具有相同的下标 n_k. $\{f_{n_k}\}$ 的极限函数 f 在 E 上是一致连续的. 因此可以找到 k，使得从 $f_{n_k}(z_{n_k})$ 到 $f(z_{n_k})$，从 $f(z_{n_k})$ 到 $f(z_{n_k}')$，以及从 $f(z_{n_k}')$ 到 $f_{n_k}(z_{n_k}')$ 的距离都 $<\varepsilon/3$. 由是可知 $d(f_{n_k}(z_{n_k}),\ f_{n_k}(z_{n_k}'))<\varepsilon$，与假设 $d(f_n(z_n),\ f_n(z_n'))$ 对所有 n 均 $\geqslant\varepsilon$ 相矛盾.

为证明(ii)的必要性，我们来证明由值 $f(z)$，$f\in\mathscr{F}$ 组成的集合的闭包是紧致的. 设 $\{w_n\}$ 是这一闭包中的一个序列. 对每一 w_n，确定 $f_n\in\mathscr{F}$，使 $d(f_n(z),\ w_n)<1/n$. 根据正规性，存在一个收敛子序列 $\{f_{n_k}(z)\}$，和序列 $\{w_{n_k}\}$ 收敛于同一值.

(i)连同(ii)的充分性可用著名的 Cantor 对角线法证明. 首先注意到在 Ω 内存在一个到处稠密的点 ζ_n 的序列，例如，具有有理坐标的点的集合. 从序列 $\{f_n\}$ 中我们取出一个在所有点 ζ_n 上

收敛的子序列．由于条件(ii)，所以要找一个在给定点上收敛的子序列总是可能的．因此可以找到下标的一个阵列：

$$\begin{array}{l} n_{11}<n_{12}<\cdots<n_{1j}<\cdots, \\ n_{21}<n_{22}<\cdots<n_{2j}<\cdots, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ n_{k1}<n_{k2}<\cdots<n_{kj}<\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array} \tag{66}$$

使得每一行包含在它前面的一行内，并使 $\lim_{j\to\infty} f_{n_{kj}}(\zeta_k)$ 对所有 k 存在．对角线序列 $\{n_{jj}\}$ 是严格递增的，而且最终也是(66)中每一行的子序列．因此 $\{f_{n_{jj}}\}$ 是 $\{f_n\}$ 的一个子序列，在所有点 ζ_k 上收敛．为方便计，把 n_{jj} 简记为 n_j．

现在考虑一个紧致集 $E\subset\Omega$，并设 $\mathscr{F}$ 在 E 上是等度连续的．我们要证明 $\{f_{n_j}\}$ 在 E 上一致连续．给定了 $\varepsilon>0$，取 $\delta>0$，使得对于 z、$z'\in E$ 和 $f\in\mathscr{F}$，$|z-z'|<\delta$ 蕴涵 $d(f(z), f(z'))<\varepsilon/3$．由于 E 是紧致的，故可用有穷个 $\delta/2$ 邻域覆盖 E．从这些邻域的每一个中取一点 ζ_k．存在一个 i_0 使得 i、$j>i_0$ 蕴涵对所有这些 ζ_k 有 $d(f_{n_i}(\zeta_k), f_{n_j}(\zeta_k))<\varepsilon/3$．对于每一 $z\in E$，ζ_k 中的一个到 z 的距离小于 δ；因此 $d(f_{n_i}(z), f_{n_i}(\zeta_k))<\varepsilon/3$，$d(f_{n_j}(z), f_{n_j}(\zeta_k))<\varepsilon/3$．这三个不等式给出 $d(f_{n_i}(z), f_{n_j}(z))<\varepsilon$．由于所有的值 $f(z)$ 属于 S 的一个紧致的因而是完备的子集，故知 $\{f_{n_j}\}$ 在 E 上是一致收敛的．

5.4 解析函数族

解析函数取值于有穷复平面 $\mathbf{C}$ 中．因此，为了将上面的讨论应用于解析函数族，自然要选 $S=\mathbf{C}$，用通常的欧氏距离．

$\mathbf{C}$ 的紧致子集都是有界闭集．由于这一原因，Arzela 定理中的条件(ii)当且仅当值 $f(z)$ 对每一 $z\in\Omega$ 均为有界时得到满足，其界可能依赖于 z．现在设条件(i)亦满足．对于一个给定的 $z_0\in\Omega$，确定 ρ 使得闭圆盘 $|z-z_0|\leqslant\rho$ 含于 Ω 中．于是给定的函数族 $\mathscr{F}$ 在

闭圆盘上等度连续. 如果在等度连续的定义中 $\delta(<\rho)$ 对应于 ε, 而且对于所有 $f\in\mathscr{F}$, $|f(z_0)|\leqslant M$, 则在 $|z-z_0|<\delta$ 中 $|f(z)|\leqslant M+\varepsilon$. 因为任一紧致集可以用有穷个具有这一性质的邻域覆盖, 故知函数在每一紧致集上都是一致有界的, 其界依赖于这个集合. 根据 Arzela 定理, 这对于所有的复值函数正规族都是正确的.

对于解析函数, 这一条件也是充分的.

定理 15 解析函数族 $\mathscr{F}$ 关于 $\mathbf{C}$ 是正规的, 当且仅当 $\mathscr{F}$ 中的函数在任一紧致集上是一致有界的.

为证明充分性, 我们证明等度连续性. 设 C 是 Ω 中一个半径为 r 的闭圆盘的边界. 若 z、z_0 在 C 的内部, 则由 Cauchy 积分定理得

$$f(z)-f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\left(\frac{1}{\zeta-z}-\frac{1}{\zeta-z_0}\right)f(\zeta)d\zeta$$
$$=\frac{z-z_0}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z)(\zeta-z_0)}.$$

如果在 C 上 $|f|\leqslant M$, 且若 z 与 z_0 限在半径为 $r/2$ 的较小的同心圆盘上, 则

$$|f(z)-f(z_0)|\leqslant\frac{4M|z-z_0|}{r}. \tag{67}$$

这证明了在较小圆盘上的等度连续性.

设 E 是 Ω 中一个紧致集. E 的每一点是一个圆盘的圆心, 其半径为 r, 如上所述. 半径为 $r/4$ 的那些开圆盘组成 E 的一个开覆盖. 选取一个有穷的子覆盖, 记相应的圆心、半径和界为 ζ_k, r_k, M_k; 设 r 是 r_k 中最小的一个, 而 M 是 M_k 中最大的一个. 对于一个给定的 $\varepsilon>0$, 令 δ 为 $r/4$ 与 $\varepsilon r/4M$ 的较小者. 如果 $|z-z_0|<\delta$, 而 $|z_0-\zeta_k|<r_k/4$, 则 $|z-\zeta_k|<\delta+r_k/4\leqslant r_k/2$. 因此可应用(67)并得到所要的 $|f(z)-f(z_0)|\leqslant 4M_k\delta/r_k\leqslant 4M\delta/r\leqslant\varepsilon$.

鉴于定理 15, 我们可以弃去术语"关于 $\mathbf{C}$ 正规", 它没有历史上的正当理由. 如果一个族具有定理所说的性质, 我们就改称它是局部有界的. 事实上, 如果一个族在每一点的一个邻域中有界, 则它显然在每一紧致集上有界. 定理告诉我们, 为要每一序列具

有一个在紧致集上一致收敛的子序列，其充分必要条件是：它是局部有界的．有趣的是：局部有界性将被导数所继承．

定理 16 一个局部有界的解析函数族具有局部有界的导数．

这由导数的 Cauchy 表示式立即推得．如果 C 是 Ω 中一个半径为 r 的闭圆盘的边界，则

$$f'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z)^2}.$$

因此在半径为 $r/2$ 的同心圆盘中，$|f'(z)|\leqslant 4M/r$（M 是 $|f|$ 在 C 上的界）．我们看到 f' 确实是局部有界的．

当然，对一阶导数正确的东西对高阶导数也正确．

5.5 经典定义

如果一个序列趋于 ∞，值不会有大的散失，因而可以雄辩地说，为了正规族的目的，这样一个序列应看作是收敛的．这是经典的观点，我们将重新立出我们的定义，使与习惯用法一致．

定义 3 定义于域 Ω 内的解析函数组成的族称为是正规的，如果其每一序列包含一个子序列，它在每一紧致集 $E\subset\Omega$ 上或者一致收敛，或者一致地趋于 ∞．

如果我们取 S 为 Riemann 球面，来证明这一定义和定义 2 一致，这样，就可让 ∞ 也是一个可能的值，这意味着我们可以考虑半纯函数的族．不需要去重新组织定义，使之包括半纯函数的正规族，因为定义 2 不作改变也适用．

但是有必要证明一个引理，它将 Weierstrass 定理和 Hurwitz 定理推广到半纯函数（定理 1 和 2）．

引理 如果半纯函数组成的一个序列在任一紧致集上按球面距离的意义一致收敛，则极限函数是半纯的，或者恒等于 ∞．

如果解析函数组成的一个序列按同一意义收敛，则极限函数或是解析的，或恒等于 ∞．

设在引理的意义下，$f(z)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(z)$．我们知道在球面度量中 $f(z)$ 是连续的．如果 $f(z_0)\neq\infty$，则 $f(z)$ 在 z_0 的一个邻域中是

有界的，并且对于大的 n，在同一邻域中函数 f_n 都 $\neq\infty$. 由 Weierstrass 定理的普通形式可知，$f(z)$ 在 z_0 的一个邻域中是解析的. 如果 $f(z_0)=\infty$，我们考虑倒数 $1/f(z)$，它是 $1/f_n(z)$ 在球面意义下的极限. 我们得出结论：$1/f(z)$ 在 z_0 近旁是解析的，因此 $f(z)$ 是半纯的. 如果 f_n 都是解析的，并且出现第二种情况，则据 Hurwitz 定理，$1/f$ 必恒等于零. 于是 f 恒等于 ∞.

从引理显然可见，定义 3 只不过是应用于球面度量的定义 2.

说一个正规族的导数组成一正规族，那是不正确的. 例如，考虑在整个平面中由函数 $f_n=n(z^2-n)$ 组成的族. 这族是正规的，因为显见在任一紧致集上一致地 $f_n\to\infty$. 不过，导数 $f_n'=2nz$ 并不组成一个正规族，因对 $z\neq0$，$f_n'(z)$ 趋于 ∞，而对 $z=0$，$f_n'(z)$ 趋于 0.

按 Arzela 定理，半纯函数组成的一个族是正规的，当且仅当它在紧致集上是等度连续的，因为这时条件(ii)显然得到满足. 等度连续性可换为有界性条件. 事实上我们有

定理 17 *解析函数或半纯函数 f 组成的一个族在经典意义下是正规的，当且仅当表达式*

$$\rho(f)=\frac{2|f'(z)|}{1+|f(z)|^2}$$

*是局部有界的*❶.

量 $\rho(f)$ 的几何意义是显然的. 事实上，使用第 1 章 2.4 节的公式

$$d(f(z_1),f(z_2))=\frac{2|f(z_1)-f(z_2)|}{[(1+|f(z_1)|^2)(1+|f(z_2)|^2]^{\frac{1}{2}}},$$

不难看出弧 γ 关于 f 的映象再经球极平面射影，其长度为

$$\int_\gamma \rho(f(z))\,|dz|.$$

如果在 z_1、z_2 之间的线段上，$\rho(f)\leqslant M$，则 $d(f(z_1),f(z_2))\leqslant M|z_1-z_2|$，这就直接证明了当 $\rho(f)$ 局部有界时的等度连续性.

---

❶ 这一定理属于 F. Marty.

为证必要性，我们首先指出，$\rho(f)=\rho(1/f)$，这可从简单计算证明．假定半纯函数的族 $\mathscr{F}$ 是正规的，但 $\rho(f)$ 在紧致集 E 上不是有界的．考虑 $f_n\in\mathscr{F}$ 的一个序列，使得 $\rho(f_n)$ 在 E 上的极大值趋于 ∞．设 f 为收敛子序列 $\{f_{n_k}\}$ 的极限函数．绕着 E 的每一点，可找到一个小的闭圆盘，包含于 Ω 中，在这圆盘上，f 或者 $1/f$ 是解析的．若 f 是解析的，则它在闭圆盘上有界，由球面收敛性可知，只要 k 充分大，$\{f_{n_k}\}$ 在圆盘内没有极点．于是可用 Weierstrass 定理(定理 1)得到结论：在一个稍小的圆盘上，一致地有 $\rho(f_{n_k})\to\rho(f)$．由于 $\rho(f)$ 是连续的，故知 $\rho(f_{n_k})$ 在这较小圆盘上有界．若 $1/f$ 解析，对 $\rho(1/f_{n_k})$ 作同一证明，结果与 $\rho(f_{n_k})$ 相同．总括起来，由于 E 是紧致的，所以 E 可用有穷个较小圆盘来覆盖，于是 $\rho(f_{n_k})$ 在 E 上有界，与假设矛盾．这就完成了定理的证明．

习　题

1．试证明，在任一域 Ω 内，具正实部的解析函数族是正规的．在什么附加条件下，它是局部有界的？

[提示：考虑函数 e^{-f}．]

2．试证明，函数 z^n (n 为非负整数) 形成 $|z|<1$ 中的一个正规族，又在 $|z|>1$ 中亦然，但是在任何包含单位圆周上一点的区域，则不然．

3．若 $f(z)$ 是全平面上的解析函数，证明由所有函数 $f(kz)$ 组成的族在圆环 $r_1<|z|<r_2$ 中正规的充要条件为：f 是一个多项式．

4．如果解析(或半纯)函数组成的族 $\mathscr{F}$ 在 Ω 中不是正规的，证明存在一点 z_0 使得 $\mathscr{F}$ 在 z_0 的任何邻域中不是正规的．

[提示：应用紧致性论据．]

第6章　共形映照. Dirichlet 问题

在解析函数理论的几何部分，共形映照的问题起着主导作用. 存在性定理和唯一性定理使我们能够不必借助解析表达式而定义重要的解析函数，而被映照区域的几何性质可引出映照函数的解析性质.

Riemann 映照定理论述一个单连通区域映成另一个单连通区域的映照. 我们将给出定理的一个依赖于正规族理论的证明. 要处理多连通区域的较困难情形，必须解 Dirichlet 问题，它是 Laplace 方程的边值问题.

1　Riemann 映照定理

我们要证明，单位圆盘可以共形地映成平面中的任一个不是平面本身的单连通区域. 这意味着，任何两个这样的区域可以互相共形映照，由一个映成另一个，因为我们可用单位圆盘作为中间步骤. 我们将对多边形区域应用这定理，并在这情形导出映照函数的显表示式.

1.1　叙述和证明

虽然映照定理是由 Riemann 确切阐述的，但第一个成功地证明的是 P. Koebe[1]. 我们要介绍的证明是原来证明的一个较短的变形.

定理 1　给定了任一不是整个平面的单连通区域 Ω 和一点 $z_0 \in \Omega$，在 Ω 中存在唯一的一个解析函数 $f(z)$，满足规格化条件

[1] 可以导出映照定理的一个有关定理，早先是由 W. F. Osgood 证明的，但是并没得到应有的重视.

$f(z_0)=0$, $f'(z_0)>0$, 使得$f(z)$定义一个把Ω映成圆盘 $|w|<1$ 的一对一映照.

唯一性是容易证明的, 因为如果有两个这样的函数 f_1 与 f_2, 则 $f_1[f_2^{-1}(w)]$定义一个把 $|w|<1$ 映成自身的一对一映照. 我们知道, 这样一个映照是由一个线性变换 S 给出的 (第4章3.4节习题5). 从条件 $S(0)=0$, $S'(0)>0$ 可知 $S(w)=w$, 因此 $f_1=f_2$.

一个在 Ω 内解析的函数 $g(z)$称为是单价的 (univalent), 如果 $g(z_1)=g(z_2)$仅对 $z_1=z_2$ 成立, 换言之, 如果 g 所定义的映照是一对一的(德文为 schlicht, 无适当的英译, 已成通用, 意即单叶). 为证明存在性, 考察具有下列性质的函数 g 的全体所组成的族 $\mathscr{F}$: (i)g 在 Ω 内解析而且单价; (ii)在 Ω 内 $|g(z)|\leqslant 1$; (iii)$g(z_0)=0$ 和 $g'(z_0)>0$. 我们希望, 函数 f 属于 $\mathscr{F}$, 而且导数 $f'(z_0)$ 取极大值. 证明可分三部分: (1)证明族 $\mathscr{F}$ 不空; (2)存在一个具有最大导数的函数 f; (3)这个 f 具有所需要的性质.

为了证明 $\mathscr{F}$ 不空, 注意, 根据假设, 存在一点 $a\neq\infty$, 它不属于 Ω. 由于 Ω 是单连通的, 所以可在 Ω 内定义 $\sqrt{z-a}$ 的一个单值分支, 记之为$h(z)$. 这一函数不能取同一值两次, 也不能取符号相反的两值. Ω 在映照 h 下的象覆盖圆盘 $|w-h(z_0)|<\rho$, 因此它不与圆盘 $|w+h(z_0)|<\rho$ 相交. 就是说, 对于 $z\in\Omega$, 有 $|h(z)+h(z_0)|\geqslant\rho$, 特别有 $2|h(z_0)|\geqslant\rho$. 现在可以验证函数

$$g_0(z)=\frac{\rho}{4}\frac{|h'(z_0)|}{|h(z_0)|^2}\cdot\frac{h(z_0)}{h'(z_0)}\cdot\frac{h(z)-h(z_0)}{h(z)+h(z_0)}$$

属于族 $\mathscr{F}$. 事实上, 由于它是从单价函数 h 用一个线性变换而得到的, 所以它本身也是单价的. 此外,

$$g_0(z_0)=0,\ \ g_0'(z_0)=(\rho/8)|h'(z_0)|/|h(z_0)|^2>0.$$

最后, 估计

$$\left|\frac{h(z)-h(z_0)}{h(z)+h(z_0)}\right|=|h(z_0)|\cdot\left|\frac{1}{h(z_0)}-\frac{2}{h(z)+h(z_0)}\right|\leqslant\frac{4|h(z_0)|}{\rho}$$

表明在 Ω 内 $|g_0(z)|\leqslant 1$.

导数 $g'(z_0)$, $g\in\mathscr{F}$ 具有一上确界 B, 它先验地说可以是无穷

大. 存在一个函数序列 $g_n \in \mathscr{F}$ 使得 $g_n'(z_0) \to B$. 根据第5章定理12,族 $\mathscr{F}$ 是正规的. 因此存在一个子序列 $\{g_{n_k}\}$, 它在各紧致集上一致收敛于一个解析的极限函数 f. 显然, 在 Ω 中 $|f(z)| \leqslant 1$, $f(z_0)=0$, $f'(z_0)=B$ (这证明了 $B<+\infty$). 如果能证明 f 是单价的,则 f 必属于 $\mathscr{F}$, 并在 z_0 处有最大导数.

首先, f 不是一个常数,因为 $f'(z_0)=B>0$. 任取一点 $z_1 \in \Omega$, 考察函数 $g_1(z)=g(z)-g(z_1)$, $g \in \mathscr{F}$. 它们在从 Ω 去掉点 z_1 以后所成的域内都 $\neq 0$. 根据 Hurwitz 定理 (第5章定理2), 每一极限函数或者决不等于0, 或者恒等于零. 但 $f(z)-f(z_1)$ 是一个极限函数, 它不恒等于零. 因此对于 $z \neq z_1$ 必有 $f(z) \neq f(z_1)$, 又因 z_1 是任意的,这就证明了 f 是单价的.

剩下来还须证明 f 可以取到 $|w|<1$ 内的每一个值 w. 假设对某个 w_0, $|w_0|<1$, 有 $f(z) \neq w_0$. 则因 Ω 是单连通的, 故可定义

$$F(z)=\sqrt{\frac{f(z)-w_0}{1-\bar{w}_0 f(z)}} \tag{1}$$

的一个单值分支$\Big($注意, 在一个单连通区域内, 所有闭曲线都同调于零. 如果在 Ω 内 $\varphi(z) \neq 0$, 则可由 $\varphi'(z)/\varphi(z)$ 的积分定义 $\log \varphi(z)$, 因而 $\sqrt{\varphi(z)}=\exp\left(\frac{1}{2}\log\varphi(z)\right)\Big)$.

显然 F 是单价的,且 $|F| \leqslant 1$. 为了把它规格化,作

$$G(z)=\frac{|F'(z_0)|}{F'(z_0)} \cdot \frac{F(z)-F(z_0)}{1-\overline{F(z_0)}F(z)}, \tag{2}$$

它在 z_0 处等于零,且具有一正的导数. 它的值由简单计算得

$$G'(z_0)=\frac{|F'(z_0)|}{1-|F(z_0)|^2}=\frac{1+|w_0|}{2\sqrt{|w_0|}}B>B.$$

这是一个矛盾,因此得出结论. $f(z)$ 取 $|w|<1$ 内的所有值 w. 于是完成了定理的证明.

初看起来, 好象我们在计算中得到 $G'(z_0)>f'(z_0)$ 完全是碰巧. 实际并非如此, 因为由 (1) 和 (2), 我们可将 $f(z)$ 表成 $W=$

$G(z)$的一个单值解析函数，而$G(z)$将$|W|<1$映入自身. 因此，不等式$|f'(z_0)|<|G'(z_0)|$是Schwarz引理的一个推论.

定理1的纯拓扑含义从它本身就显出重要性. 我们现在知道，任一单连通区域可以拓扑地映成一圆盘(对于整个平面，可以通过一个极普通的函数映成圆盘)，因此，任何两个单连通区域在拓扑上是等价的.

习 题

1. 如z_0是实的，而Ω是一个关于实轴对称的区域，试由唯一性定理证明f满足对称关系$f(\bar{z})=\overline{f(z)}$.

2. 如果Ω关于点z_0对称，相应的结论是什么?

1.2 边界性态

我们假设$f(z)$定义一个把域Ω映成另一域Ω'的共形映照. 要问当z趋近于边界时会发生什么情况? 在有些情况下，边界的性态可以非常精确地预言. 例如，若Ω和Ω'都是Jordan区域●，则f可以扩张成将Ω的闭包映成Ω'的闭包的一个拓扑映照. 遗憾的是，考虑到篇幅的限制，我们不能介绍这一重要定理的证明(证明需要相当充分的准备).

我们能够而且要证明一个纯拓扑含义的非常朴素的定理. 首先我们来弄清楚"z趋于Ω的边界"这一说法的意义. 有两种情况: 我们可以考虑Ω中的点列$\{z_n\}$，或者可以考虑弧$z(t)$，$0\leqslant t<1$，使得所有的$z(t)$都位于Ω中. 如果点z_n或$z(t)$最终与Ω中的任何点保持远离，我们就说点列或弧趋于Ω的边界. 换言之，如果$z\in\Omega$，则存在一个$\varepsilon>0$和一个n_0或t_0，使得$n>n_0$时就有$|z_n-z|\geqslant\varepsilon$，或使得对所有的$t>t_0$都有$|z(t)-z|\geqslant\varepsilon$.

在这一情况下，以z为圆心，ε(可能依赖于z)为半径的圆盘

● 已经知道，虽然不是那末容易证明，一条Jordan曲线(第3章2.1节)将平面恰好分成两个区域，一个有界，一个无界. 那有界的区域就称为Jordan区域.

组成 Ω 的一个开覆盖．由此可知，任何紧致子集 $K\subset\Omega$ 必为有穷多个这些圆盘所覆盖．如考虑相应的 n_0 或 t_0 的最大数，则知 z_n 或 $z(t)$ 当 $n>n_0$ 或 $t>t_0$ 时不能属于 K．通俗地说，对于任一紧致集 $K\subset\Omega$，存在点列或弧的一个尾巴，它不与 K 相交．反之，这蕴涵着原来的条件，因为如果 $z\in\Omega$ 是给定的，则可选 K 为以 z 为圆心而含于 Ω 内的一个闭圆盘．若这圆盘的半径为 ρ，则原来的叙述对任何 $\varepsilon<\rho$ 为真．

有了这些准备，我们要证明的定理几乎就不证自明了：

定理 2　设 f 是把域 Ω 映成域 Ω' 的一个拓扑映照．如果 $\{z_n\}$ 或 $z(t)$ 趋于 Ω 的边界，则 $\{f(z_n)\}$ 或 $f(z(t))$ 趋于 Ω' 的边界．

事实上，设 K 是 Ω' 中的一个紧致集．则 $f^{-1}(K)$ 是 Ω 中的一个紧致集，且存在 n_0（或 t_0）使得对 $n>n_0$（或 $t>t_0$），有 z_n（或 $z(t)$）不属于 $f^{-1}(K)$．但是这样 $f(z_n)$ [或 $f(z(t))$] 就不属于 K 了．

虽然这定理是拓扑的，但对我们有重大意义的是对共形映照的应用．

1.3　反射原理的应用

如果我们有更多的信息，那就可能有更强的叙述．我们主要关心的是单连通区域，因此可假设区域之一是一个圆盘．用 1.1 节的同一记法，设 $f(z)$ 定义一个将区域 Ω 映成单位圆盘的共形映照，满足规格化条件 $f(z_0)=0$（导数的规格化是无关紧要的）．我们将用反射原理（第 4 章，定理 26）来导出另外的信息．

设 Ω 的边界包含一直线段 γ．必要时通过旋转，我们可以假设 γ 位于实轴上，假设它是区间 $a<x<b$．这样的假设仅当边界的其余部分保持远离 γ 时才能导致重要的简化．由于这一原因，我们要强化这假设并要求 γ 的每一点有一个邻域，它和整个边界 $\partial\Omega$ 的交就与它同 γ 的交一样．这时就说 γ 是一自由边界弧（free boundary arc）．

根据这一假设，γ 上的每一点是一个圆盘的中心，这圆盘与

$\partial\Omega$ 的交是它的实直径．显然，由这一直径确定的每一个半圆盘，或者完全在 Ω 内，或者完全在 Ω 外，而至少有一个必在 Ω 内．如果只有一个在 Ω 内，我们就称这点是单边边界点，如果两个都在 Ω 内，就称它为双边边界点．由于 γ 是连通的，所以它的全部点将是同一类型的，因此我们就说 γ 是一单边边界弧或双边边界弧．

定理 3 假设一个单连通域 Ω 的边界包含一线段 γ 作为它的一个单边自由边界弧．那末将 Ω 映成单位圆盘的函数 $f(z)$ 可以延拓成一个在 $\Omega\cup\gamma$ 上解析且一对一的函数．γ 的象是单位圆上的一段弧 γ'．

对于双边弧，只要稍作明显的修改，即得同样的定理成立．

为了证明，考察一个以 $x_0\in\gamma$ 为圆心的圆盘，它是这样小，以致在 Ω 中的一半并不包含适合 $f(z_0)=0$ 的点 z_0．于是在这半个圆盘中，$\log f(z)$ 有一单值分支，它的实部在 z 趋近于直径时趋于 0，因为由定理 2 知道 $|f(z)|$ 趋于 1．于是由反射原理，$\log f(z)$ 有一个到整个圆盘的解析延拓．因此 $\log f(z)$，从而 $f(z)$ 在 x_0 处解析．到重迭圆盘的延拓必互相重合，并定义一个在 $\Omega\cup\gamma$ 上解析的函数．

我们还注意在 γ 上 $f'(z)\neq0$．事实上，$f'(x_0)=0$ 将意味着 $f(x_0)$ 是一个重值，这时 γ 的两段相遇在 x_0 的子弧将映成两段形成角 π/n，$n\geq2$ 的弧，这显然不可能．例如，若上半圆盘在 Ω 中，则在 γ 上有

$$\partial\log|f|/\partial y=-\partial\arg f/\partial x<0,$$

故 $\arg f$ 在同一方向不断移动．这就证明了在 γ 上映照是一对一的．

这定理可以推广到自由边界弧在一圆周上的区域．经过明显的修改，这定理对双边边界弧亦成立．

1.4 解析弧

一个定义在区间 $a<t<b$ 上的实函数或复函数 $\varphi(t)$ 称为是

实解析的(或在实的意义下解析)，是指：对于区间中的任一个 t_0，Taylor 展开式

$$\varphi(t)=\varphi(t_0)+\varphi'(t_0)(t-t_0)+\frac{1}{2}\varphi'(t_0)(t-t_0)^2+\cdots$$

在某个区间 $(t_0-\rho,\ t_0+\rho)(\rho>0)$ 中收敛．但这时由 Abel 定理可知，只要 $|t-t_0|<\rho$，级数对 t 的复值也收敛，并表示该圆盘中的一个解析函数．在互相重迭的圆盘中，各函数都是一样的，因为它们在实轴的一段上互相重合．因此，$\varphi(t)$ 可以定义为在一个关于实轴对称并包含线段 $(a,\ b)$ 的域 Δ 中的解析函数．

在这些情况下，我们说 $\varphi(t)$ 确定一个解析弧．如果 $\varphi'(t)\neq 0$，它是正则的．如果 $\varphi(t_1)=\varphi(t_2)$ 仅当 $t_1=t_2$ 时成立，它是一个简单弧．

假设 Ω 的边界包含一个正则的简单解析弧 γ，并设它是一自由的单边弧．定义可以仿照前面的定义来阐述，但为了避免冗长的解释，我们可以暂时假设存在一个关于区间 $(a,\ b)$ 对称的域 Δ，具有性质：当 t 位于 Δ 的上半部分时，$\varphi(t)\in\Omega$，而当 t 在下半部分时，$\varphi(t)$ 落在 Ω 的外面．

如果 $f(z)$ 是使 $f(z_0)=0$ 的映照函数，并设 $\varphi(t)$ 在 Δ 中 $\neq z_0$，则由反射原理，$\log f(\varphi(t))$ 从而 $f[\varphi(t)]$ 具有一个从 Δ 的上半部分到下半部分的解析延拓．对于实的 $t_0\in(a,\ b)$，我们还有 $\varphi'(t_0)\neq 0$，因此 φ 在 $\varphi(t_0)$ 的一个邻域内有解析的反函数 φ^{-1}，综合起来，就知 $f(z)$ 在该邻域内解析．

定理 4 如果 Ω 的边界包含一段自由单边解析弧 γ，则映照函数具有一个到 $\Omega\cup\gamma$ 的解析延拓，而 γ 映成单位圆的一段圆弧．

希望读者将最后的定理写得更精确，并完成其证明．

2 多边形的共形映照

若 Ω 为一多边形，则映照问题有一个几乎是明显的解．事实

上，我们将看到，映照函数可以通过一个公式来表出，在其中，只有某些参数具有依赖于多边形特定形状的值.

2.1 在角上的性态

设 Ω 是一个有界的单连通域，其边界是一条不自交的闭折线. 设按正的循环次序，相继的顶点为 $z_1, \cdots, z_n$（令 $z_{n+1}=z_1$）. 在 z_k 处的角由 $\arg(z_{k-1}-z_k)/(z_{k+1}-z_k)$ 的值给出，其值在 0 与 2π 之间. 我们记它为 $\alpha_k\pi\,(0<\alpha_k<2)$. 引进外角

$$\beta_k\pi=(1-\alpha_k)\pi \quad (-1<\beta_k<1)$$

也是方便的. 注意 $\beta_1+\cdots+\beta_n=2$. 多边形是凸的，当且仅当所有的 $\beta_k>0$.

由定理 3 知道，映照函数 $f(z)$ 可以延拓到多边形的任一边（就是说，到两相邻顶点之间的开直线段），而且每一边以一对一的方式映成单位圆的一段弧. 我们要证明，这些弧是互不相交的，而且在它们之间没有空隙.

为此，考察一个圆扇形 S_k，它是 Ω 与中心在 z_k 的一个充分小圆盘的交. $\zeta=(z-z_k)^{1/\alpha_k}$ 的一个单值分支将 S_k 映成半圆盘 S'_k. $z_k+\zeta^{\alpha_k}$ 的一个适当分支取值在 Ω 中，我们可以考虑 S'_k 中的函数 $g(\zeta)=f(z_k+\zeta^{\alpha_k})$. 由定理 2 可知，当 ζ 趋近于直径时，$|g(\zeta)|\to 1$. 应用反射原理，就得出结论：$g(\zeta)$ 具有一个到整个圆盘的解析延拓. 特别，这意味着，当 $z\to z_k$ 时，$f(z)$ 有极限 $w_k=e^{i\theta_k}$，而对应于相遇在 z_k 的两弧确实有一个公共端点. 由于当 z 沿正方向描出边界时，$\arg f(z)$ 必是递增的，所以这些弧不会重迭，至少在 w_k 的

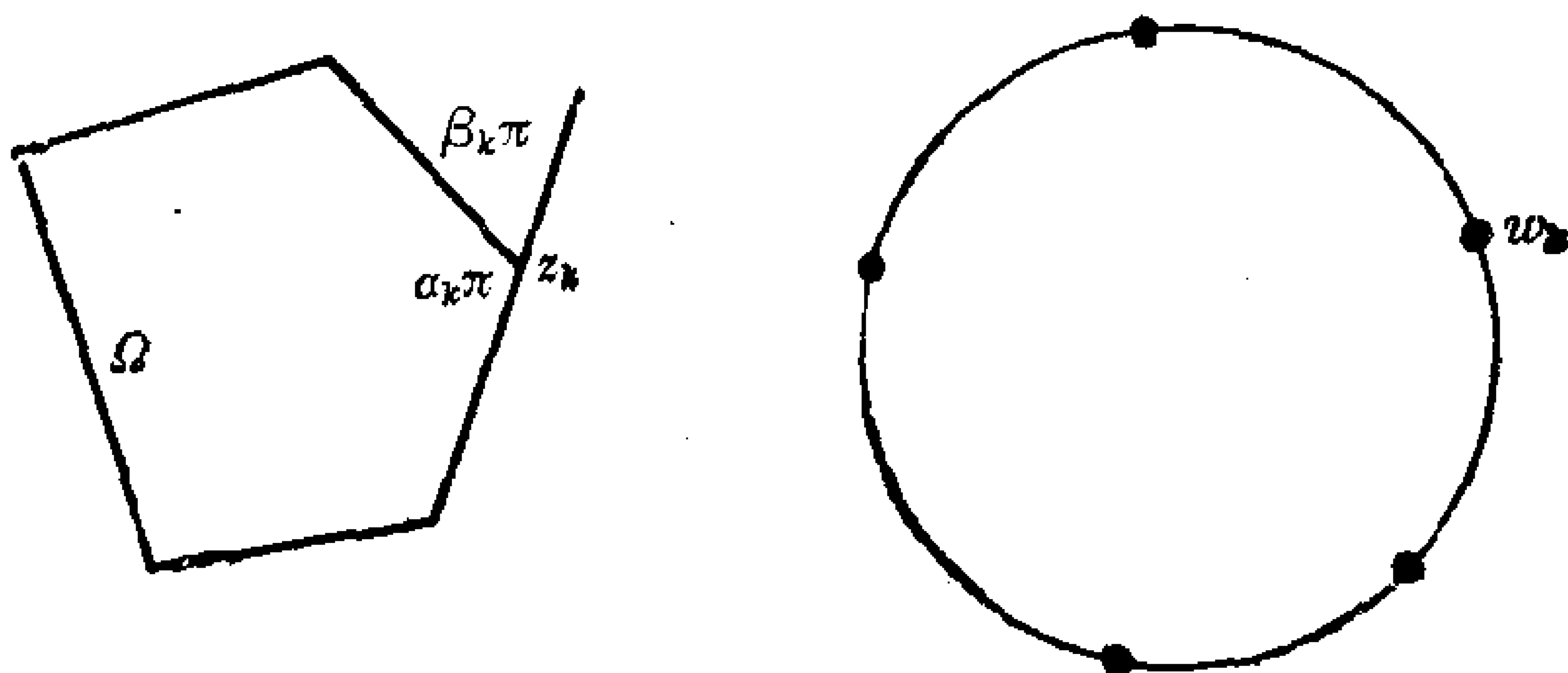


图 6-1 多边形的共形映照

一个邻域中不会重迭．如果考虑到 f 将边界映成绕原点的环绕次数为 1 的一条曲线，那就容易得出结论：所有的弧都是互不相交的．换言之，f 可以延拓为将 Ω^- 映成闭单位圆盘的同胚映照，顶点 z_k 变到点 w_k，边对应于这些点之间的弧(图 6–1)．

2.2 Schwarz–Christoffel 公式

我们要建立的公式不是关于函数 f 而是关于它的反函数的，这反函数记为 F.

定理 5 将 $|w|<1$ 共形地映成角为 $\alpha_k\pi(k=1, \cdots, n)$ 的多边形的函数 $z=F(w)$，必有形式：

$$F(w)=C\int_0^w \prod_{k=1}^n (w-w_k)^{-\beta_k}dw+C', \tag{3}$$

其中 $\beta_k=1-\alpha_k$，w_k 是单位圆上的点，C 与 C' 是复常数.

在上一节 2.1 中讨论的函数 $g(\zeta)=f(z_k+\zeta^{\alpha_k})$ 在原点解析，它具有 Taylor 展开式

$$f(z_k+\zeta^{\alpha_k})=w_k+\sum_{m=1}^{\infty} a_m\zeta^m.$$

这里 $a_1\neq0$，否则，半圆盘 S' 的象就不能包含在单位圆盘之中．所以这个级数可以进行逆运算，令 $w=f(z_k+\zeta^{\alpha_k})$，就得到

$$\zeta=\sum_{m=1}^{\infty} b_m(w-w_k)^m,$$

其中 $b_1\neq0$，展开式在 w_k 的一个邻域中有效．作 α_k 次幂，我们得到关于反函数 F 的表示式

$$F(w)-z_k=(w-w_k)^{\alpha_k}G_k(w),$$

其中 G_k 在 w_k 附近解析且 $\neq0$．经微分可知 $F'(w)(w-w_k)^{\beta_k}$ 在 w_k 处解析且 $\neq0$，因此乘积

$$H(w)=F'(w)\prod_{k=1}^n (w-w_k)^{\beta_k} \tag{4}$$

在单位闭圆盘中解析且 $\neq0$.

我们断定 $H(w)$ 在实际上是个常数．为此我们来检查一下当 $w=e^{i\theta}$ 位于单位圆上 $w_k=e^{i\theta_k}$ 与 $w_{k+1}=e^{i\theta_{k+1}}$ 之间时 $H(w)$ 的幅角.

我们知道，$\arg F'(e^{i\theta})$等于单位圆在$e^{i\theta}$的切线与它的象在$F(e^{i\theta})$的切线之间的夹角；我们把这简记为$\arg F'=\arg dF-\arg dw$. 但dF是常数，因为F描出一条直线，而$\arg dw=\theta+\frac{\pi}{2}$. 因子$w-w_k$可以写成$e^{i\theta}-e^{i\theta_k}=2ie^{i(\theta+\theta_k)/2}\sin\frac{1}{2}(\theta-\theta_k)$，因此它的幅角是$\frac{\theta}{2}$加一个常数(这从几何上看也是明显的). 把(4)式右端的所有因子的幅角加起来，我们就看到$\arg H(w)$与$-\theta+\left(\sum_1^n\beta_k\right)\cdot\frac{\theta}{2}=0$相差一常数. 因此$\arg H(w)$在$w_k$与$w_{k+1}$之间是常数，但因它是连续的，所以它在整个单位圆上必为常数. 由极值原理可知$\arg H(w)=\operatorname{Im}\log H(w)$在单位圆内部是常数，因此$H(w)$是常数.

我们现在已经证明了

$$F'(w)=C\prod_{k=1}^{n}(w-w_k)^{-\beta_k},$$

作积分即得公式(3).

我们指出，单位圆的线性变换可使我们把点w_k中的三个，例如w_1, w_2, w_3变到预先指定的位置. 对于$n=3$，除了平凡的变量变换外，映照函数只依赖于角；这反映出这样的事实，即具有同样角的三角形都相似. 对于$n>3$，余下的常数$w_4, \cdots, w_n$或它们的幅角θ_k称为问题的**配连参数**(accessory parameter). 只有在极少数情形它们才能不用数值计算确定.

如果给θ_k以任意的值，则容易验证形如(3)的函数把单位圆映成一条闭折线，但通常无法说出它是否自交. 如果它不自交，那就不难证明由(3)给出的$F(w)$产生一个映成闭折线内部的一对一映照(精确的证明要用到幅角原理).

公式(3)称为Schwarz-Christoffel **公式**. 这一公式的另一形式可用来将上半平面映成一个多边形的内部. 从$\operatorname{Im} w>0$到Ω的映照函数可以写成形式：

$$F(w)=C\int_0^w\prod_{k=1}^{n-1}(w-\xi_k)^{-\beta_k}dw+C', \tag{5}$$

其中 ξ_k 是实的. 最后的指数 β_k 在公式中并不明显出现, 但可由 $\beta_n=2-(\beta_1+\cdots+\beta_{n-1})$ 确定, 而且和其他指数一样, 它应满足条件: $-1<\beta_n<1$. 于是推知积分(5)对 $w=\infty$ 收敛, 而在 ∞ 的点对应于角为 $\alpha_n\pi$, $\alpha_n=1-\beta_n$ 的一个顶点. 如果 $\beta_n=0$, 则这个顶点徒有其表, 多边形变成 $n-1$ 边形.

习　题

1. 证明(3)中 β_k 可变为 $=-1$. 它的几何意义是什么?

2. 如果多边形的一个顶点可以在 ∞, 则公式须作什么修改? 如果在这情况下 $\beta_k=1$, 问多边形将如何?

3. 证明将圆盘映成平行条, 或映成有两个直角的半条形映照, 可以作为 Schwarz–Christoffel 公式的特殊情形得出.

4. 试导出公式(5), 可直接导出, 也可借助于(3).

5. 证明 $$F(w)=\int_0^w(1-w^n)^{-2/n}\,dw$$
将 $|w|<1$ 映成一个正 n 边形的内部.

6. 试确定一个将上半平面映成域
$$\Omega=\{z=x+iy;\,x>0,\ y>0,\ \min(x,\ y)<1\}$$
的共形映照.

2.3 映成矩形的映照

如果 Ω 是一矩形, 可在 (5) 中选取 $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=\rho>1$. 这样, 映照函数为
$$F(w)=\int_0^w\frac{dw}{\sqrt{w(w-1)(w-\rho)}},$$
这是一个椭圆积分. 为明确起见, 我们决定 $\sqrt{w}$、$\sqrt{w-1}$、$\sqrt{w-\rho}$ 的值都位于第 I 象限. 为详细研究这个映照, 我们来看当 w 在实轴上变化时 $F(w)$ 的变化情况. 当 w 是实数时, 每一个根式或者为正数, 或者是虚部为正的纯虚数(除了平方根为 0 的点以外). 当 $0<w<1$ 时, 有一个平方根是实的, 两个平方根是虚的, 因此 $F(w)$ 从 0 递减到值 $-K$, 这里

$$K=\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{t(1-t)(\rho-t)}}. \tag{6}$$

对于$1<w<\rho$，只有一个虚的平方根，由此可知这积分从 1 到 w 是纯虚数，虚部为负．所以 $F(w)$将从 $-K$ 垂直向下到 $-K-iK'$，

$$K'=\int_1^\rho\frac{dt}{\sqrt{t(t-1)(\rho-t)}}.$$

对于 $w>\rho$，被积式是正的，$F(w)$以正向描出一水平线段．它的端点有多远？由于象应该是一个矩形，所以它必然中止于 $-iK'$，但我们要加以直接证明．一个办法是将线段长度用积分表示为

$$\int_\rho^\infty\frac{dt}{\sqrt{t(t-1)(t-\rho)}},$$

经变量变换 $t=(\rho-u)/(1-u)$，这个积分就变换到 (6)．但是容易看到，由 Cauchy 定理得

$$\int_{-\infty}^\infty\frac{dt}{\sqrt{t(t-1)(t-\rho)}}=0,$$

这是因为沿半径为 R 的半圆周的积分当 $R\to\infty$ 时趋于 0．其实部等于 0 就意味着各水平线段都相等．而从其虚部等于 0 得知 $-\infty<w<0$ 映成从 $-iK'$ 到 0 的线段．这样，矩形就完全了．

通常更为可取的是使用一个表示矩形双重对称性的公式．可将矩形的顶点对应于点 ±1 与 $\pm1/k$，这里$0<k<1$．由于一个常数因子无关紧要，故可取映照为

$$F(w)=\int_0^w\frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)(1-k^2w^2)}}, \tag{7}$$

并令$\sqrt{1-w^2}$ 与 $\sqrt{1-k^2w^2}$ 都有正的实部．于是可以看到矩形的顶点在$-\frac{K}{2}$，$\frac{K}{2}$，$\frac{K}{2}+iK'$，$-\frac{K}{2}+iK'$，其中

$$K=\int_{-1}^1\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}},$$

$$K'=\int_1^{1/k}\frac{dt}{\sqrt{(i^2-1)(1-k^2t^2)}}.$$

上半平面的象是图 6-2 中的阴影矩形 R_0. F 的反函数记为 $w=f(z)$; 它定义在 R_0 中，并可延拓成将闭矩形映成闭的半平面的一个一对一映照(具 Riemann 球面的拓扑). 注意 $z=iK'$ 对应于 ∞.

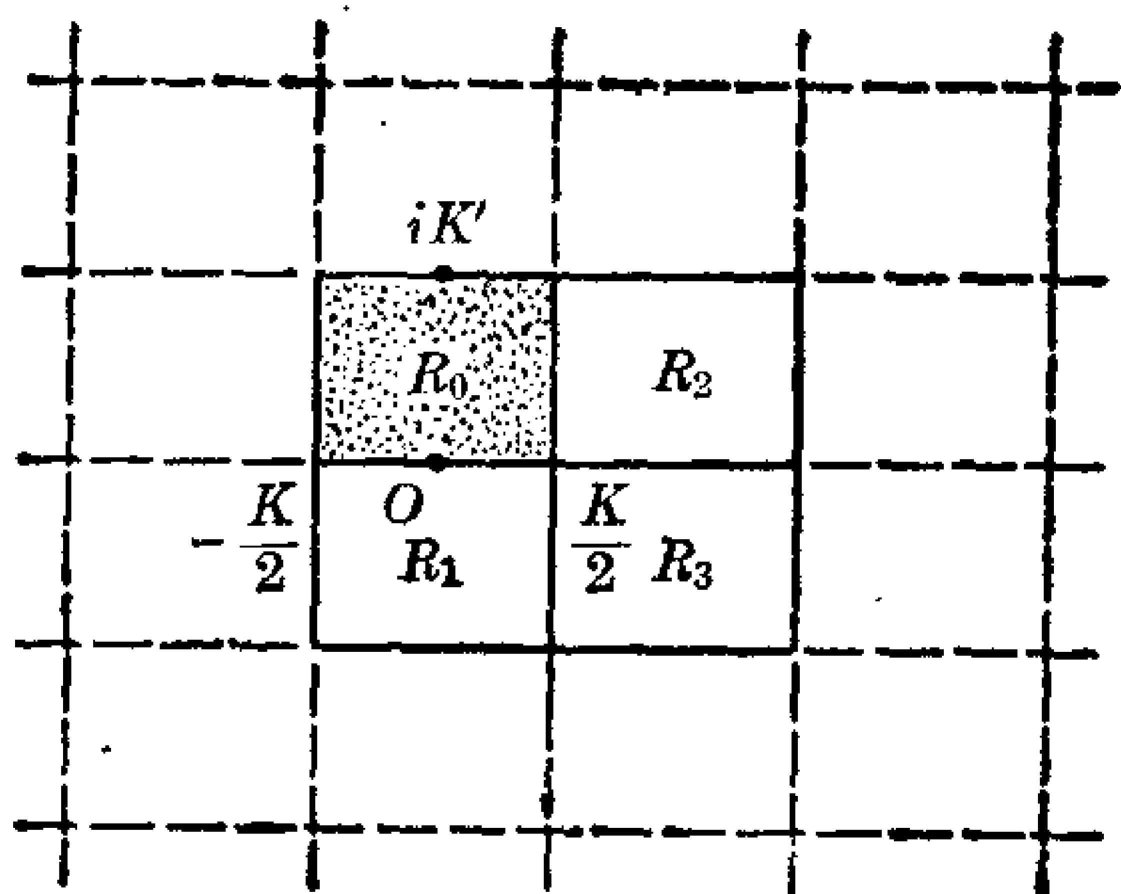


图 6-2

反射原理可使我们将 f 的定义拓展到相邻的矩形 R_1 与 R_2, 即对 $z\in R_1$, 令 $f(z)=\overline{f(\bar{z})}$, 对 $z\in R_2$, 令 $f(z)=\overline{f(K-\bar{z})}$. 类似地可从 R_1 或 R_2 过渡到 R_3; 延拓由 $f(z)=f(K-z)$ 给出. 反射的过程显然可以继续进行, 直至 $f(z)$ 定义为整个平面上的一个亚纯函数为止. 用周期性来定义延拓可能更方便些, 因为延拓函数必须满足关系

$$f(z+2K)=f(z),\quad f(z+2iK')=f(z).$$

我们已经证明椭圆积分 (7) 的反函数是一个周期为 $2K$ 与 $2iK'$ 的亚纯函数. 这样的函数称为**椭圆函数**. 椭圆积分与椭圆函数之间的联系是由 Gauss 发现的, 但没有发表; 后由 Abel 与 Jacobi 重新发现.

习　　题

1. 试证明公式(7)给出 $F(\infty)=iK'$.
2. 试证明 $K=K'$ 的充要条件是 $k=(\sqrt{2}-1)^2$.
3. 试证明 $f(z)$、$f(z+K)$ 与 $f(z+iK')$ 都是 z 的奇函数, 而 $f\left(z+\frac{K}{2}\right)$ 与 $f\left(z+\frac{K}{2}+iK'\right)$ 是偶函数.

2.4 Schwarz 的三角形函数

上半平面由

$$F(w)=\int_0^w w^{\alpha_1-1}(w-1)^{\alpha_2-1}\,dw$$

映成一个三角形，其角为 $\alpha_1\pi$, $\alpha_2\pi$, $\alpha_3\pi$. 前已指出，这里没有配连参数.

通过对边的反射，反函数 $f(z)$ 仍可延拓到相邻的三角形. 如同在矩形的情形一样，这个导致一个亚纯函数的过程特别有意义. 而为要导致亚纯函数，必要条件是：对相交于一点的各边的重复反射最终需经偶数步回到原来的三角形. 换言之，角必须具有形式 $\frac{\pi}{n_1}$, $\frac{\pi}{n_2}$, $\frac{\pi}{n_3}$, 分母均为整数. 初等的推理表明满足条件

$$\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}=1$$

的只有三重组(3, 3, 3)、(2, 4, 4)与(2, 3, 6). 它们分别对应于等边三角形，等腰直角三角形，和半等边三角形.

容易验证，在每一情形下，三角形的反射象填满平面，没有重迭，也没有空隙. 这表明映照函数确实都是亚纯函数的约束，称为 Schwarz **三角形函数**.

希望读者为三种情形的每一种画一个三角形网的图. 于是可以看到，每个三角形函数具有一对周期，它们的比不是实数，因而是一个椭圆函数. 作为一个练习，希望读者确定一下在由周期所张成的平行四边形中共有多少个三角形.

3　调和函数的进一步观察

我们已经在第 4 章第 6 节讨论过调和函数的一些基本性质. 那时，为方便起见，使用了一个比较粗糙的定义，即只要求所有二阶导数应当连续的定义. 这对证明均值性质已经足够了，而从均值性质又可导出 Poisson 表示与反射原理. 现在，如果我们以均值性质而不是以 Laplace 方程为出发点，则可得到更为满意的理论.

在这方面，我们还将导出一个关于调和函数单调序列的重要定理，通常称为 Harnack **原理**.

3.1 具有均值性质的函数

设 $u(z)$ 是域 Ω 中的一个实值连续函数. 我们说 u 满足均值性质, 如果当圆盘 $|z-z_0|\leqslant r$ 包含于 Ω 中时, 有

$$u(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(z_0+re^{i\theta})d\theta. \tag{8}$$

我们在第 4 章中证明了均值性质蕴涵着极值原理. 实际上, 仔细检查一下证明可知, 只要假设 (8) 对充分小的 r, $r<r_0$ 成立就够了, 这里甚至允许 r_0 依赖于 z_0. 我们重述结论如下: 具有这一性质的连续函数如果不化为常数就不能取到一个相对极大(或极小).

我们早已证明, 每一调和函数满足均值条件, 现在我们要证明下面的逆:

定理 6 满足条件(8)的连续函数 $u(z)$ 必是调和的.

又, 需要满足的条件只是对充分小的 r 说的. 如果 u 满足 (8), 则 u 与任一调和函数的差也满足 (8). 假设圆盘包含于 u 有定义的区域 Ω 中. 应用 Poisson 公式 (第 4 章第 6.3 节), 我们可以作一个函数 $v(z)$, 它对 $|z-z_0|<\rho$ 是调和的, 在 $|z-z_0|=\rho$ 上连续并等于 $u(z)$. 将极值原理应用于 $u-v$, 这意味着在整个圆盘中 $u(z)=v(z)$, 因而 $u(z)$ 是调和的.

定理 6 的言外之意是: 我们可以把调和函数定义为具有均值性质的连续函数. 这样的函数自动地具有各阶连续导数, 并满足 Laplace 方程.

类似的推理表明, 即使没有条件 (8), 关于导数的假设可以放松到相当程度. 只假设 $u(z)$ 是连续的, 并设导数 $\partial^2u/\partial x^2$, $\partial^2u/\partial y^2$ 存在并满足 $\Delta u=0$. 用上面的同一记号, 我们来证明函数

$$V=u-v+\varepsilon(x-x_0)^2,\quad \varepsilon>0$$

必服从极大值原理. 事实上, 如果 V 有一极大值, 则从微积分法则, 我们有 $\partial^2V/\partial x^2\leqslant 0$, $\partial^2V/\partial y^2\leqslant 0$, 因而在该点上, $\Delta V\leqslant 0$. 另一方面,

$$\Delta V=\Delta u-\Delta v+2\varepsilon=2\varepsilon>0.$$

这矛盾表明了极大值原理成立．这样就可以得出结论：在圆盘 $|z-z_0|\leqslant\rho$ 上，$u-v+\varepsilon(x-x_0)^2\leqslant\varepsilon\rho^2$．令 ε 趋于零，就得 $u\leqslant v$．同样可证明相反的不等式．因此 u 是调和的●．

3.2 Harnack 原理

我们记得，Poisson 公式（第 4 章 6.3 节）使我们可以将一个调和函数用它在一个圆周上的值来表出．为了适应目前的需要，我们把它写成形式

$$u(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\rho^2-r^2}{|\rho e^{i\theta}-z|^2}u(\rho e^{i\theta})d\theta, \tag{9}$$

其中 $|z|=r<\rho$ 而 u 假定在 $|z|\leqslant\rho$ 中调和（或对 $|z|<\rho$ 调和，对 $|z|\leqslant\rho$ 连续）．联系初等不等式

$$\frac{\rho-r}{\rho+r}\leqslant\frac{\rho^2-r^2}{|\rho e^{i\theta}-z|^2}\leqslant\frac{\rho+r}{\rho-r} \tag{10}$$

的右端，公式(9)给出估计

$$|u(z)|\leqslant\frac{1}{2\pi}\,\frac{\rho+r}{\rho-r}\int_0^{2\pi}|u(\rho e^{i\theta})|d\theta.$$

如果已知 $u(\rho e^{i\theta})\geqslant 0$，那末也可用(10)的第一个不等式，得到一个双重估计

$$\frac{1}{2\pi}\,\frac{\rho-r}{\rho+r}\int_0^{2\pi}u\,d\theta\leqslant u(z)\leqslant\frac{1}{2\pi}\,\frac{\rho+r}{\rho-r}\int_0^{2\pi}u\,d\theta.$$

但 $u(\rho e^{i\theta})$ 的算术平均等于 $u(0)$，于是最后得到下面的上界与下界：

$$\frac{\rho-r}{\rho+r}u(0)\leqslant u(z)\leqslant\frac{\rho+r}{\rho-r}u(0). \tag{11}$$

这是 Harnack 不等式；我们要着重指出，它仅对正的调和函数为真．

(11) 的主要应用是用于正项级数，或等价地，调和函数的增序列．它引出一个有力而简单的定理，称为 Harnack 原理．

● 这证明属于 C. Carathéodory.

定理 7 考察函数 $u_n(z)$ 的一个序列，其中每一函数定义在某一域 Ω_n 内，且在该域内调和. 设 Ω 为这样的一个域，它的每一点具有一邻域包含于除有穷个以外的所有 Ω_n 中，并设在这一邻域中，当 n 足够大时，有 $u_n(z)\leqslant u_{n+1}(z)$. 那么这里只有两种可能：或者是 $u_n(z)$ 在 Ω 的每一紧致子集上一致地趋于 ∞，或者是 $u_n(z)$ 在紧致集上一致收敛于 Ω 内一个调和的极限函数 $u(z)$.

最简单的情形是函数 $u_n(z)$ 在 Ω 内均为调和，并组成一非降序列. 不过，有很多应用说明这一情形不够普遍.

为了证明这一定理，先设至少对于一点 $z_0\in\Omega$，$\lim\limits_{n\to\infty}u_n(z_0)=\infty$. 根据假设，可以找到一个 r 和 m，使得对于 $|z-z_0|<r$ 及 $n\geqslant m$，函数 $u_n(z)$ 都是调和的，并组成一非降序列. 如将不等式(11)的左边应用于非负函数 u_n-u_m，则知 $u_n(z)$ 将在圆盘 $|z-z_0|\leqslant r/2$ 中一致地趋于 ∞. 另一方面，如 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n(z_0)<\infty$，应用不等式的右边同样可证 $u_n(z)$ 在 $|z-z_0|\leqslant r/2$ 上有界. 因此，在其上 $\lim u_n(z)$ 分别为有穷及无穷的两个集都是开集，而由于 Ω 是连通的，故必有一集是空集. 只要 $u_n(z)$ 的极限在单一点上是无穷大，则它必恒等于无穷大. 至于一致性，可用 Heine-Borel 引理来证明.

在相反的情形，极限函数 $u(z)$ 是到处均为有穷的，我们现在只要证明其收敛是一致的即可. 应用上面的同样记法，对于 $|z-z_0|\leqslant r/2$，及 $n+p\geqslant n\geqslant m$，有 $u_{n+p}(z)-u_n(z)\leqslant 3(u_{n+p}(z_0)-u_n(z_0))$. 因此，在 z_0 点收敛就意味着在一邻域中一致收敛，再应用 Heine-Borel 引理可知在每一紧致集上收敛是一致的. 至于极限函数的调和性，则可从 $u(z)$ 能用 Poisson 公式来表示这一点而得证.

习　题

设 E 是包含于域 Ω 中的一紧致集，求证，存在一个只依赖于 E 及 Ω 的常数 M，使得 Ω 中的每一正调和函数 $u(z)$，对于任两点 z_1、$z_2\in E$，满足不等式 $u(z_2)\leqslant Mu(z_1)$.

4 Dirichlet 问题

调和函数理论中最重要的问题是找一个具有给定边值的调和函数的问题，称为 Dirichlet 问题. Poisson 公式解出了圆盘域的问题，但在任意域的情形，问题就困难得多. 已经知道有很多解法，但是除了 O.Perron 的以次调和函数为依据的方法之外，其余方法都不够简单，不适宜于在基础教材中介绍.

4.1 次调和函数

一维 Laplace 方程具有形式 $d^2u/dx^2=0$. 因此，单变数的调和函数将是线性函数 $u=ax+b$. 函数 $v(x)$ 称为凸函数，如果在任一区间的两端点上与一线性函数 $u(x)$ 具有相同的值，而在此区间内部，它至多等于 $u(x)$.

如果将这一情形推广到二维平面，就会引出次调和函数类. 线性函数对应于调和函数，区间对应于域，区间的端点对应于域的边界. 因此，一个复变数或两个实变数的函数 $v(z)$ 将称为次调和函数，如果对于任一域，在这域中，$v(z)$ 小于或等于某一调和函数 $u(z)$，而在域的边界上，$v(z)$ 与 $u(z)$ 恒等. 由于这一节的目的是解 Dirichlet 问题，因此我们把条件简弱为：在域的边界上 $v(z)\leqslant u(z)$ 将导致在域中 $v(z)\leqslant u(z)$.

一个等价的但在某些方面比较简单的定义如下：

定义 1 定义于域 Ω 内的一个连续实值函数 $v(z)$ 称为是 Ω 中的一个次调和函数，如果对于域 $\Omega'\subset\Omega$ 内的任一调和函数 $u(z)$，差 $v-u$ 在 Ω' 中恒满足极值原理.

这里的条件表明，$v-u$ 如不恒等于常数，则在 Ω' 中不能有极大值. 特别是，v 本身在 Ω 中不能有极大值. 应当注意，这一定义具有局部特性：如 v 在每一点 $z\in\Omega$ 的邻域中是次调和的，则它在 Ω 中必是次调和的. 其证明可直接推得. 如果一个函数在点 z_0 的一个邻域中是次调和的，则称这一函数在点 z_0 是次调和的.

因此，为了一个函数在一域中是次调和的，必须而且只须它在域的所有点上是次调和的．

一个调和函数显然是次调和的．

次调和性的一个充分条件是：v 具有一正的 Laplace 式($\Delta v>0$)．事实上，如果 $v-u$ 具有一极大值，则由初等微积分学可知，在达到极大值的点上，必有 $\partial^2/\partial x^2(v-u)\leqslant 0$, $\partial^2/\partial y^2(v-u)\leqslant 0$，只要这些二阶导数存在；这就意味着 $\Delta v=\Delta(v-u)\leqslant 0$．这个条件不是必要的，而实际上，一个次调和函数并不须要有偏导数．如函数具有连续的一阶和二阶导数，则可以证明，其充分和必要条件是 $\Delta v\geqslant 0$．由于我们并不需要这一性质，故其证明留给读者作为习题．这一条件提供了一个简单的方法，用以可确定一个给定的 x, y 的初等函数是否是次调和的．

现在我们来证明，次调和函数可以用一个不等式作为标志，这一不等式拓广了调和函数的平均值性质：

定理 8 为了一个连续函数 $v(z)$ 在 Ω 中是次调和的，其必要和充分条件是：对于 Ω 中的每一圆盘 $|z-z_0|\leqslant r$，$v(z)$ 恒满足不等式：

$$v(z_0)\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}v(z_0+re^{i\theta})d\theta. \tag{12}$$

条件的充分性是易见的，因为在证明不等于常数的 v 不能有一极大值时，实际需用的是公式 (12)，而不是平均值性质．由于 $v-u$ 满足同一不等式，故知 v 是次调和的．

为了证明必要性，可在圆盘 $|z-z_0|<r$ 中作 Poisson 积分 $P_v(z)$，其中 v 的值取在圆周 $|z-z_0|=r$ 上．如 v 是次调和的，则函数 $v-P_v$ 在圆盘内不能有极大值，除非它是常数．根据 Schwarz 定理 (第 4 章定理 23) 可知，当 z 趋近于圆周上的一点时，$v-P_v$ 趋于零．因此 $v-P_v$ 在闭圆盘中有一极大值．如这一极大值是正的，则必在一内点上取得，因此函数不能是常数．这是一个矛盾，因此必有 $v\leqslant P_v$．对于 $z=z_0$，可得 $v(z_0)\leqslant P_v(z_0)$，这就是不等式 (12)．

兹将次调和函数的一些初等性质列出如下：

1．如 v 是次调和的，则对于任一常数 $k\geqslant 0$，函数 kv 必也是次调和的．

2．如 v_1 及 v_2 都是次调和的，则 v_1+v_2 必也是次调和的．

这两种性质是定理 8 的直接推论．下一性质可从原来定义推得．

3．如 v_1 及 v_2 都是 Ω 中的次调和函数，则 $v=\max(v_1, v_2)$ 也是 Ω 中的次调和函数．

这里的记法应理解为：在每一点上，$v(z)$ 等于 $v_1(z)$、$v_2(z)$ 两者中较大一值．v 的连续性是很明显的．现在设 $v-u$ 在点 $z_0\in\Omega'$ 取得极大值，此处 u 定义且调和于 Ω'．我们可设 $v(z_0)=v_1(z_0)$．则对于 $z\in\Omega'$，有

$$v_1(z)-u(z)\leqslant v(z)-u(z)\leqslant v(z_0)-u(z_0)=v_1(z_0)-u(z_0).$$

因此，v_1-u 是常数，而从同一不等式可知 $v-u$ 必也是常数．这就证明了 v 是次调和的．

设 Δ 是一圆盘，它的闭包包含于 Ω，并以 P_v 表示用圆周上的 v 值组成的 Poisson 积分．则下述性质必正确：

4．如 v 是次调和的，则在 Δ 中等于 P_v 而在 Δ 外等于 v 的函数 v' 必也是次调和的．

v' 的连续性可从 Schwarz 定理得证．我们已经证明，在 Δ 中有 $v\leqslant P_v$，因此在整个 Ω 内必有 $v\leqslant v'$．显然，在 Δ 的内部和外部，v' 是次调和的．今设 $v'-u$ 在 Δ 的圆周上一点 z_0 处取得一极大值，则 $v-u$ 也将在 z_0 处取得一极大值．因此 $v-u$ 是常数，而从不等式

$$v-u\leqslant v'-u\leqslant v'(z_0)-u(z_0)=v(z_0)-u(z_0)$$

可知 $v'-u$ 也是常数．从而证明 v' 是次调和的．

注　我们只感兴趣于连续次调和函数，但是普遍接受的定义只要求函数是上半连续的．一个实值函数 $v(z)$ 在 z_0 是上半连续的 (u. s. c., upper semicontinuous 的缩写)，如果 $\limsup\limits_{z\to z_0} v(z)\leqslant$

$v(z_0)$；是下半连续的(l. s. c.)，如果 $\liminf_{z\to z_0} v(z) \geqslant v(z_0)$. 若不明确究竟是哪一种，那么只要记住，"上"是指双不等式 $v(z_0)-\varepsilon< v(z)<v(z_0)+\varepsilon$ 中的上一半；而"下"是指这不等式的下一半. 习惯上也允许 u. s. c.函数取值 $-\infty$，而 l. s. c. 函数取值 $+\infty$.

在其它方面，定义 1 无改变. 极大值原理对上半连续函数就象对连续函数一样有意义，这是因为一个上半连续函数也将在任何紧致集上取到极大值(见习题 6).

还可证明 (12) 中的积分总是有意义的，并可证明定理 8 在 v 只是上半连续时仍正确.

习　题

1. 求证函数 $|x|$, $|z|^\alpha(\alpha\geqslant 0)$, $\log(1+|z|^2)$都是次调和的.

2. 设 $f(z)$是解析函数，求证 $|f(z)|^\alpha(\alpha\geqslant 0)$ 及 $\log(1+|f(z)|^2)$ 都是次调和的.

3. 如 v 及其一直到二阶的偏导数都是连续的，求证，当且仅当 $\Delta v\geqslant 0$ 时 v 是次调和的.

[提示：对于充分性，可先证 $v+\varepsilon x^2, \varepsilon>0$，是次调和的. 对于必要性，可证，如 $\Delta v<0$，则其在圆上的平均值将是半径的一个降函数.]

4. 求证，如一次调和函数的自变数经一共形映照，则新的函数仍然是次调和的.

5. 试列出一条定理，说明次调和函数列的一致极限是次调和的，并证明之.

6. 如果 $v(z)$在开集 Ω 上是上半连续的，证明它在任何紧致集 $E\subset\Omega$ 上有一极大值.

4.2 Dirichlet 问题的解

最先应用次调和函数来研究 Dirichlet 问题的是 O. Perron. 他的方法的特点是具有极大的普遍性，而且完全是初等的.

考察一有界域 Ω 及定义于其边界 Γ 上的一个实值函数 $f(\zeta)$ [为了明显起见，边界点以 ζ 表示]. 开始时，$f(\zeta)$ 不一定要连续，

但为了简单起见，设它是有界的，即 $|f(\zeta)|\leqslant M$. 对于每一个 f，可用一简单方法在 Ω 中定义一个调和函数 $u(z)$，这个方法将在下面仔细叙述. 如 f 是连续的，并设 Ω 满足某些适当的条件，则相应的函数 u 将是 Ω 内边值为 f 的 Dirichlet 问题的解.

我们用下述性质定义函数 v 的类 $\mathfrak{V}(f)$：

(a) v 在 Ω 中是次调和的；

(b) 对于所有的 $\zeta\in\Gamma$, $\overline{\lim\limits_{z\to\zeta}}\, v(z)\leqslant f(\zeta)$.

性质 (b) 的精确意义就是：给定一 $\varepsilon>0$，及一点 $\zeta\in\Gamma$，存在 ζ 的一个邻域 Δ，使得不等式 $v(z)<f(\zeta)+\varepsilon$ 在 $\Delta\cap\Omega$ 中成立. 函数类 $\mathfrak{V}(f)$ 是非空的，因为它包含所有 $\leqslant -M$ 的常数. 我们来证明：

引理 1 对于 $v\in\mathfrak{V}(f)$，定义 $u(z)$ 为 $v(z)$ 的上确界，则函数 u 在 Ω 中调和.

首先，在 Ω 内每一 $v\leqslant M$. 这是极值原理的一个简单推论，但为了它的重要性，我们将对这一点作较详细的说明. 对于一给定的 $\varepsilon>0$，设 E 是 Ω 中使 $v(z)\geqslant M+\varepsilon$ 的点 z 全体所成的集合. 在余集 $\sim E$ 中的点 z 有三类：(1) 在 Ω 外部的点，(2) 在 Γ 上的点，(3) 在 Ω 中使 $v(z)<M+\varepsilon$ 的点. 在 (1) 的情形，z 具有一邻域包含于 Ω 的外部；在 (2) 的情形，根据性质 (b)，有一个邻域 Δ，在 $\Delta\cap\Omega$ 中有 $v<M+\varepsilon$；在 (3) 的情形，根据连续性，存在包含于 Ω 的一个邻域，在其内 $v<M+\varepsilon$. 因此，$\sim E$ 是开集而 E 是闭集. 又由于 Ω 是有界的，故 E 是紧致的. 如 E 为非空，则 v 将在 E 上有一极大值，而这也是 Ω 内的一个极大值. 但这是不可能的，因为根据 (b)，v 不能是一个大于 M 的常数. 因此，对于每一 ε，E 是空集，从而知在 Ω 内必有 $v\leqslant M$.

考察一圆盘 Δ，其闭包包含于 Ω，及一点 $z_0\in\Delta$. 存在函数 $v_n\in\mathfrak{V}(f)$ 的一个序列，使得 $\lim\limits_{n\to\infty} v_n(z_0)=u(z_0)$. 命 $V_n=\max(v_1, v_2, \cdots, v_n)$. 则 V_n 组成 $\mathfrak{V}(f)$ 中一个非降的函数序列. 作 V_n'，使之在 Δ 的外部等于 V_n，而在 Δ 中等于 V_n 的 Poisson 积分. 根据

上节的性质(4)可知，V'_n 仍属于 $\mathfrak{B}(f)$. V'_n 组成一非降序列，而不等式 $v_n(z_0)\leqslant V_n(z_0)\leqslant V'_n(z_0)\leqslant u(z_0)$ 表明 $\lim\limits_{n\to\infty} V'_n(z_0)=u(z_0)$. 根据 Harnack 原理，序列 $\{V'_n\}$ 收敛于 Δ 中的一个调和的极限函数 U，它满足条件 $U\leqslant u$ 及 $U(z_0)=u(z_0)$.

现在假定我们从另外一点 $z_1\in\Delta$ 开始作同样的布置. 选定 $w_n\in\mathfrak{B}(f)$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty} w_n(z_1)=u(z_1)$，但此时，在构作之前，先以 $\overline{w}_n=\max(v_n, w_n)$ 代替 w_n. 命 $W_n=\max(\overline{w}_1, \cdots, \overline{w}_n)$，用 Poisson 积分构作对应序列 $\{W'_n\}$，于是可得一调和的极限函数 U_1，满足 $U\leqslant U_1\leqslant u$ 及 $U_1(z_1)=u(z_1)$. 由此可知 $U-U_1$ 在 z_0 处取得极大值零. 因此 U 必恒等于 U_1，这就证明了，对于任意的 $z_1\in\Delta$，$u(z_1)=U(z_1)$. 从而可知 u 在任一圆盘 Δ 中调和，因而在全部 Ω 内调和.

现在我们来研究，对于连续的 f，在什么情形下 u 才是 Dirichlet 问题的解. 首先应当注意 Dirichlet 问题并不常有解. 例如，如 Ω 是有孔圆盘 $0<|z|<1$，考察边值 $f(0)=1$ 及 $|\zeta|=1$ 时 $f(\zeta)=0$. 具有这些边值的一个调和函数将是有界的，因此原点是一可去奇点. 但此时由极值原理推知这一函数恒等于零，所以在原点不能有边值 1. 故知问题无解.

不难看出，Dirichlet 问题的一个解，如果存在的话，必恒等于 u. 因为，如果 U 是一个解，则首先必有 $U\in\mathfrak{B}(f)$，因此 $u\geqslant U$. 根据极值原理可知，对于所有的 $v\in\mathfrak{B}(f)$，有 $v\leqslant U$，从而得相反的不等式 $u\leqslant U$.

解的存在对于很多种域是可以断言的. 一般说来，如果 Ω 的余集在任一边界点的邻域中不是太"薄"，则解总是存在的. 下面我们来证明一个引理，这一引理表面看来与"薄"这个概念关系不大.

引理 2 设在 Ω 中有一调和函数 $\omega(z)$，它的连续的边值 $\omega(\zeta)$ 除了在一点 ζ_0 处之外，都是正的，而在 ζ_0 处 $\omega(\zeta_0)=0$. 那末，如果 $f(\zeta)$ 在 ζ_0 处连续，则由 Perron 方法所确定的对应函数

u 必满足 $\lim_{z\to\zeta_0} u(z)=f(\zeta_0)$.

要证明这一引理，只要证明，对于所有的 $\varepsilon>0$, $\overline{\lim}_{z\to\zeta_0} u(z)\leqslant f(\zeta_0)+\varepsilon$ 及 $\underline{\lim}_{z\to\zeta_0} u(z)\geqslant f(\zeta_0)-\varepsilon$. 这里我们仍设 Ω 有界，且 $|f(\zeta)|\leqslant M$.

确定 ζ_0 的一个邻域 Δ, 使得对于 $\zeta\in\Delta$, 成立不等式 $|f(\zeta)-f(\zeta_0)|<\varepsilon$. 在余集 $\Omega-\Delta\cap\Omega$ 中，函数 $\omega(z)$ 具有一正的极小值 ω_0. 考察如下调和函数的边值，

$$W(z)=f(\zeta_0)+\varepsilon+\frac{\omega(z)}{\omega_0}(M-f(\zeta_0)).$$

对于 $\zeta\in\Delta$, 有 $W(\zeta)\geqslant f(\zeta_0)+\varepsilon>f(\zeta)$, 而对于 Δ 外部的 ζ, 则有 $W(\zeta)\geqslant M+\varepsilon>f(\zeta)$. 因此，根据极值原理，可知任一函数 $v\in\mathfrak{V}(f)$ 必满足条件 $v(z)<W(z)$. 由此可知 $u(z)\leqslant W(z)$, 因而 $\overline{\lim}_{z\to\zeta_0} u(z)\leqslant W(\zeta_0)=f(\zeta_0)+\varepsilon$, 这是我们所要证明的第一个不等式.

对于第二个不等式，我们只须证明，函数

$$V(z)=f(\zeta_0)-\varepsilon-\frac{\omega(z)}{\omega_0}(M+f(\zeta_0))$$

属于 $\mathfrak{V}(f)$. 对于 $\zeta\in\Delta$, 有 $V(\zeta)\leqslant f(\zeta_0)-\varepsilon<f(\zeta)$, 而在所有其他边界点上，$V(\zeta)\leqslant -M-\varepsilon<f(\zeta)$. 由于 V 是调和的，它属于 $\mathfrak{V}(f)$, 从而得 $u(z)\geqslant V(z)$, $\underline{\lim}_{z\to\zeta_0} u(z)\geqslant V(\zeta_0)=f(\zeta_0)-\varepsilon$. 这就完成了证明.

引理 2 中的函数 $\omega(z)$ 有时称为点 ζ_0 处的垒. 现在很明显可以看出，只要每一边界点有一垒，则 Dirichlet 问题就是可解的. 因此，我们现在只须列出一些说明垒存在的几何条件. 已经知道一些必要和充分条件，但这些条件都不具有纯几何特征，所以难于应用. 不过求出一些广泛可用的充分条件还不难.

我们从最简单的情形开始，设 $\Omega\cup\Gamma$ 包含在一个开的半平面中，位于边界线上的一点 ζ_0 为例外. 如这一边界线的方向为 α(半平面在其左)，则 $\omega(z)=\operatorname{Im} e^{-i\alpha}(z-\zeta_0)$ 是 ζ_0 处的一个垒.

更一般地说，设 ζ_0 为一线段的端点，这一线段上的所有点，除了点 ζ_0，都位于 Ω 的外部．如这一线段的另一端点为 ζ_1，则在线段的外部，可定义

$$\sqrt{\frac{z-\zeta_0}{z-\zeta_1}}$$

的一单值分支．如对角 α 作适当的选择，易见函数

$$\operatorname{Im}\left[e^{-i\alpha}\sqrt{\frac{z-\zeta_0}{z-\zeta_1}}\right]$$

就是 ζ_0 处的一个垒．

应用这些方法求得的不是最强结果，但在大多数应用中是充分的．因此可得下列定理：

定理 9 对于任一域 Ω，如它的每一边界点是一线段的端点，而该线段的其他点都是 Ω 的外点，则 Ω 的 Dirichlet 问题可解．

这里的假设可减弱为如下的形式：如 Ω 及其余集具有一公共边界，它由有穷条简单闭曲线组成，这些闭曲线到处都有切线．角点及某种类型的尖点也是许可的❶．

习 题

如果 Ω 是有孔圆盘 $0<|z|<1$，而 f 当 $|\zeta|=1$ 时，$f(\zeta)=0$，而 $f(0)=1$，证明所有函数 $v\in\mathfrak{B}(f)$在 Ω 中均 $\leqslant 0$．

5 多连通域的典型映照

从 Riemann 映照定理可得出结论：除了整个平面以外的任两单连通域，可以互相共形映象，或者说，它们是共形等价的．但对于连通数相同的两个多连通域来说，情形并不如此．因此就有必要来试求一类典型域，使每一个多连通域与一个，而且只有一个典

❶ 基本上用同一方法可证的这一问题的最佳结果是：Dirichlet 问题对任一域可解，只要该域的余集的分集都不退化为一点．从这一命题可很容易导出 Riemann 映照定理的一个独立的证明方法．

型域共形等价. 典型域的选择具有一定程度的任意性, 这里有几种类型具有同样简单的性质.

为了使我们的研究不超出初等的水平, 我们这里只限于讨论有限连通数的域. 将可看出, 构作典型映照的基本步骤是引进某些在边界上具有特别简单性质的调和函数. 其中, 调和测度只与域及域的围线之一有关, 而 Green 函数则与域及一内点有关.

5.1 调和测度

在研究一个域 Ω 的共形映照时, 我们当然可以用任意一个共形等价于 Ω 的域来代替 Ω, 也就是说, 我们可以任意地先作几个预备的共形映照作为过渡. 由于在域的选择方面有着这样的自由, 因此, 对于由边界的复杂构造所引起的种种困难, 我们就可以不必考虑了.

下面, 我们以 Ω 表示一平面域, 其连通数 $n>1$. 余集的分集记为 $E_1, E_2, \cdots, E_n$, 并以 E_n 表无界的分集. 不失一般性, 我们假设所有的 E_k 不退化为一点, 因为退化为一点的分集显然是任一映照函数的可去奇点, 因此, 如果将这一孤立的边界点并入到域内, 则映照仍保持不变.

E_n 的余集 Ω' 是一单连通域. 根据 Riemann 定理, Ω' 可共形地映成圆盘 $|z|<1$; 在这一映照下, Ω 变换成一个新的域, 而 $E_1, \cdots, E_{n-1}$ 的象就是这一新域的余集的有界分集. 为了方便起见, 我们约定映照前后的域用同一记号表示; 特别是, E_n 现在就是集 $|z|\geqslant 1$. 取正向的单位圆 $|z|=1$ 记为 C_n, 并称它为新域 Ω 的外围线.

考察 E_1 关于扩充平面的余集. 它仍是一单连通域, 我们可将它映成单位圆的外部, 以 ∞ 对应于 ∞. C_n 的象是一有向闭解析曲线, 按约定仍记为 C_n. 此外, 我们把内围线 C_1 定义为新平面中取负向的单位圆.

这一方法一直可以继续下去, 直到所得的域 Ω 的外围线为 C_n 并有 $n-1$ 条内围线 $C_1, \cdots, C_{n-1}$ 为止(图 6-3). 应当指出, 一条

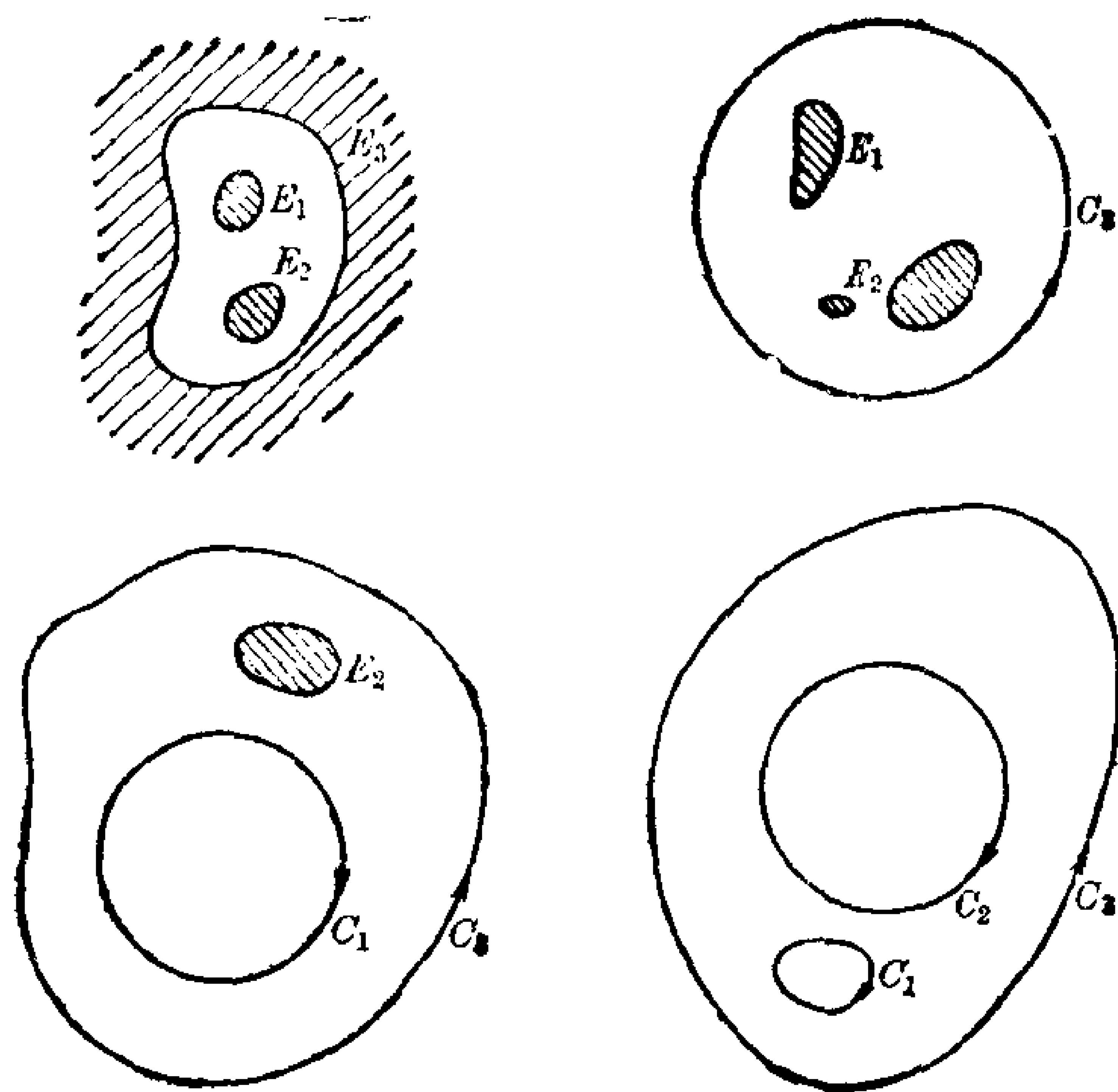


图 6-3　一个多连通域的变换

围线关于平面上任意一点的指示数是可以很容易地算出的. 例如, 设经过若干次映照, C_k, $k<n$ 成为单位圆, 此时 C_k 关于 E_k 内点的指示数是 -1, 而关于所有不在 C_k 上的其他点的指示数则是 0. 其后的各次映照不会改变这种状态. 这一事实是很明显的, 而且不难根据幅角原理给出一形式证明. 用同样方法可以证明外围线 C_n 关于 E_n 内点的指示数为 0, 而关于所有不在 C_n 上的其他点的指示数为 **1**. 由此可知, 闭链 $C=C_1+C_2+\cdots+C_n$ 将按第 4 章 5.1 节定义 4 的意义界定 Ω. 内围线和外围线的特性是一致的, 因为, 关于 E_k 的一内点的反演显然可使 C_k 成为外围线.

易见定理 9 可应用于 Ω. 事实上, 由于任一围线都可以变换成一个圆, 故垒的存在是十分明显的.

现在我们来解在 C_k 上的边值为 1, 在其他围线上的边值为 0 的域 Ω 中的 Dirichlet 问题. 把解记为 $\omega_k(z)$, 并称这一解为 C_k 关于域 Ω 的**调和测度**. 在 Ω 中, 显然有 $0<\omega_k(z)<1$, 且

$$\omega_1(z)+\omega_2(z)+\cdots+\omega_n(z)\equiv 1.$$

如映照 Ω 使得 C_i 成为一个圆, 则根据对称原理, ω_k 必可越过 C_i 进行延拓. 因此, ω_k 在可以扩张至一个较大的域的意义下, 在闭

域 Ω 中是调和的.

围线 $C_1, \cdots, C_{n-1}$ 组成了 Ω 中闭链的一个同调基底，这里的同调是对一个尚未经规定的较大域来说的. ω_k 的共轭调和函数是多值的，它沿 C_j 有周期

$$\alpha_{kj}=\int_{C_j} \frac{\partial \omega_k}{\partial n} ds=\int_{C_j} {}^*d\omega_k.$$

更一般地，我们可以断言，常系数线性组合

$$\lambda_1\omega_1(z)+\lambda_2\omega_2(z)+\cdots+\lambda_{n-1}\omega_{n-1}(z)$$

不可能有一个单值共轭函数，除非所有的 λ_i 都等于零. 为了证明这一点，设这一式是单值解析函数 $f(z)$ 的实部. 根据对称原理，$f(z)$ 可以解析延拓到 Ω 的闭包. 因此，$f(z)$ 的实部在 C_i 上将恒等于 λ_i, $i=1, \cdots, n-1$, 而在 C_n 上应等于零. 这样，每一围线将映成为一条竖直线段. 如 w_0 不在这些线段的任一段上，则在每一围线上可定义 $\arg(f(z)-w_0)$ 的一单值分支. 根据幅角原理，$f(z)$ 在 Ω 中不能取 w_0 的值. 这样一来，$f(z)$ 必化为一常数，因为否则，Ω 的象一定包含有线段外部的点. 从此得出结论，$f(z)$ 的实部恒等于零，因而边值 λ_i 必都等于零.

我们所证明的乃是线性齐次方程组

$$\lambda_1\alpha_{1j}+\lambda_2\alpha_{2j}+\cdots+\lambda_{n-1}\alpha_{n-1,j}=0 \quad (j=1, \cdots, n-1) \tag{13}$$

只有平凡解 $\lambda_i=0$, 因为它们就是使 $\lambda_1\omega_1+\cdots+\lambda_{n-1}\omega_{n-1}$ 具有单值共轭的条件. 根据线性方程理论，任何以 (13) 的系数为系数的非齐次方程组必有一个解. 特别，可解出方程组

$$\begin{aligned}
&\lambda_1\alpha_{11}+\lambda_2\alpha_{21}+\cdots+\lambda_{n-1}\alpha_{n-1,1}=2\pi,\\
&\lambda_1\alpha_{12}+\lambda_2\alpha_{22}+\cdots+\lambda_{n-1}\alpha_{n-1,2}=0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\lambda_1\alpha_{1,n-1}+\lambda_2\alpha_{2,n-1}+\cdots+\lambda_{n-1}\alpha_{n-1,n-1}=0,\\
&\lambda_1\alpha_{1n}+\lambda_2\alpha_{2n}+\cdots+\lambda_{n-1}\alpha_{n-1,n}=-2\pi,
\end{aligned} \tag{14}$$

其中最后一方程是前面 $n-1$ 个方程的结果（因为 $\alpha_{k1}+\alpha_{k2}+\cdots+\alpha_{kn}=0$）. 换言之，我们可以求得一多值积分 $f(z)$, 它沿 C_1 及 C_n 上的周期为 $\pm 2\pi i$, 所有其他周期都等于零，它的实部在 C_k 上恒

等于 λ_k（令 $\lambda_n=0$）. 于是函数 $F(z)=e^{f(z)}$ 是单值的. 我们来证明下面的定理:

定理 10 函数 $F(z)$ 把 Ω 一一共形映照为一个域, 它由环域 $1<|w|<e^{\lambda_1}$ 中减去位于圆 $|w|=e^{\lambda_i}$ $(i=2, \cdots, n-1)$ 上的 $n-2$ 段同心弧组成.

这一映照可由图 6–4 说明. 围线 C_1 及 C_n 与整圆是一一对应的, 但其他围线则映成圆形裂缝. 可以设想, 每一裂缝具有两边, 连同其两端点组成一闭围线.

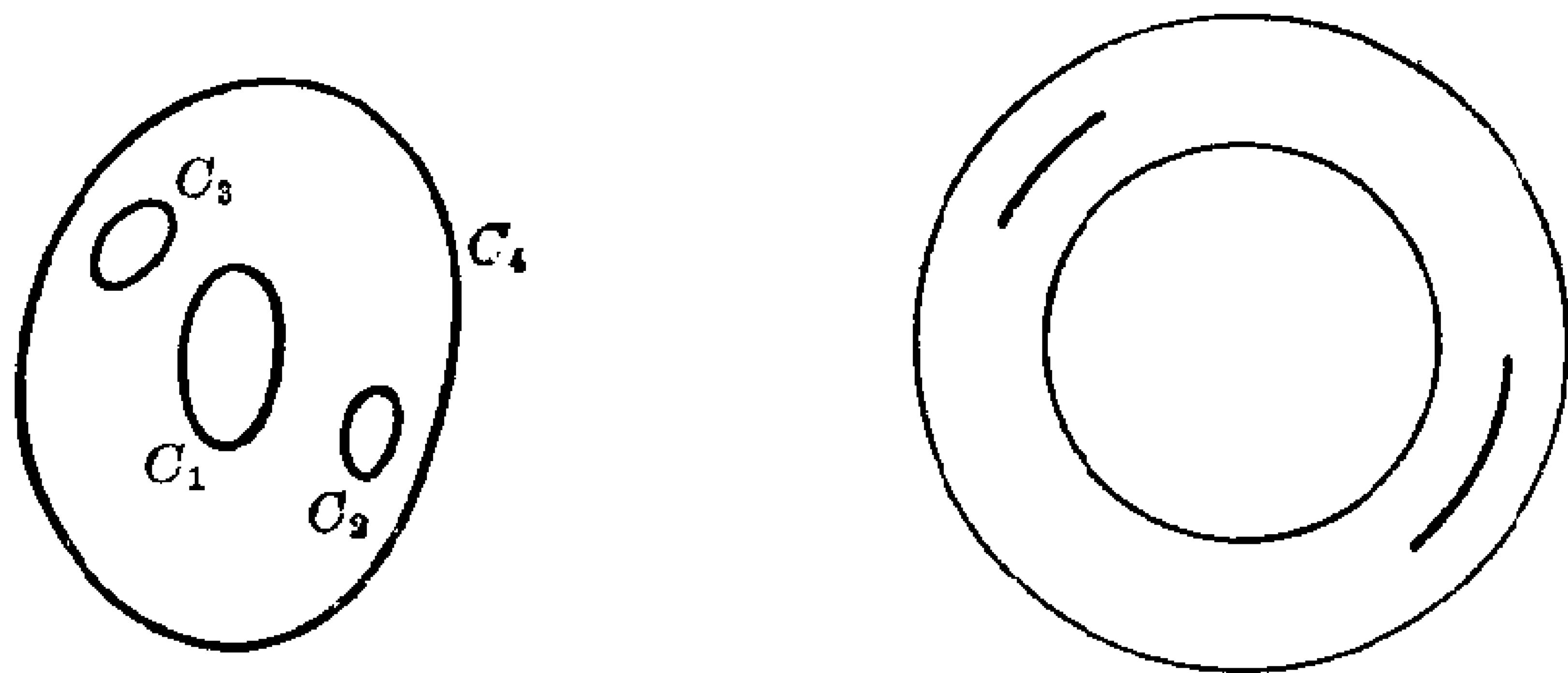


图 6-4 同心裂缝域

这一定理可用幅角原理来证明. 我们知道 $F(z)$ 是解析的, 在每一围线上具有不变的模. 方程 $F(z)=w_0$ 的根的数目为

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{F'(z)dz}{F(z)-w_0}+\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{F'(z)dz}{F(z)-w_0}+\cdots$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n}\frac{F'(z)dz}{F(z)-w_0}, \tag{15}$$

此处 w_0 不能取值于边界上. 如 $w_0=0$, 则(15)式中的各项是已知的, 分别等于 1, 0, $\cdots$, 0, -1. 对于 $|w_0|<e^{\lambda_1}$, 沿 C_1 的积分永远等于 1, 而如 $|w_0|>e^{\lambda_1}$, 则等于零. 同样, 最后一积分当 $|w_0|<1$ 时等于 -1, 而当 $|w_0|>1$ 时等于零. 对于所有的 w_0, 只要 $|w_0|\neq e^{\lambda_k}$, 则沿 C_k, $1<k<n$ 的积分都等于零. 现在设 $F(z)$ 实际取到 w_0 的值; 由于 Ω 被映成一开集, 故可取 $|w_0|\neq$ 所有的 e^{λ_i}. 对于这一 w_0, 表达式(15)必为正. 但这只有在 $1<|w_0|<e^{\lambda_1}$ 时方始可能. 这样就得 $\lambda_1>0$, 而根据连续性, $0\leqslant\lambda_i\leqslant\lambda_1$.

从此, 定理的证明可用纯拓扑的论断来完成. 不过, 从幅角原

理来推出结论将更为有益，而且也更为简单．如果在边界上有单极存在，则留数定理仍可应用，但此时应以围线积分的 Cauchy 主值来代替围线积分，而且留数的和应包括边界上留数的半值❶．对于目前的情况来说，第二个约定就是说在边界上所取的值应按其重复度的一半计算．至于主值的计算，则并无困难．如 $|w_0|=e^{\lambda_i}$，则

$$\text{pr. v.} \int_{C_k} \frac{F'(z)dz}{F(z)-w_0} = \frac{1}{2}\int_{C_k} \frac{F'(z)dz}{F(z)},$$

因为根据初等几何学原理(或直接计算)，

$$d\arg(F(z)-w_0) = \frac{1}{2}\, d\arg F(z).$$

因此，如 $k=1$，则(15)中的主值等于 $\frac{1}{2}$，如 $2\leqslant k\leqslant n-1$，则等于 0，如 $k=n$，则等于 $-\frac{1}{2}$．

由此可知，在圆 $|w_0|=1$ 或 $|w_0|=e^{\lambda_1}$ 上，每一值取半次，也就是说在边界上取一次；这就证明 C_1 及 C_n 的映照是一对一的，而且 $0<\lambda_i<\lambda_1$，$i\neq 1, n$．其次，如 $1<|w_0|<e^{\lambda_1}$，则 w_0 的值或者为内点取一次，为边界点取二次，或者视重复度为 2 时为边界点取一次．在每一围线 $C_2, \cdots, C_{n-1}$ 上，可定义 $\arg F(z)$ 的一单值分支，重复度为 2 的值对应于 $\arg F(z)$ 的相对极大和极小．它至少有一极大值及一极小值，但也不能多，否则 $F(z)$ 将过同一值超过二次．此外，极大值与极小值之差应小于 2π，这说明每一围线映成为一段特定的弧．最后，对应于不同围线的各段弧应当是互不相交的．

这就证明了全部定理 10，而且我们还可以说明边界的对应关系．这一定理的重要意义在于：我们可把 Ω 映成为一个由两圆围成并带有 $n-2$ 个同心圆形裂缝的典型域；用正规化方法可将内圆

❶ 在第 4 章第 5.3 节中，Cauchy 的主值是在沿一直线求积分的情形下提出的．在一任意解析弧的情形，我们可以用一辅助共形映照来定义主值，这一映照将一子弧映为一直线段．留数定理的推广是很容易看出的，它证明了，主值是与所用的辅助共形映照无关的．

的半径选为1. 对于给定的C_1及C_n, 典型映照除了一旋转之外是唯一确定的,这可从方程组(15)只能有一个解这一事实看出.

连通数为n的典型域的形状依赖于$3n-6$个实常数. 事实上,每一裂缝的位置和大小由三个数确定, 总数就是$3n-6$; 环的厚度给出了一个附加的参数,但因旋转是任意的,所以有另一参数可以不计.

习　题

1. 试直接证明: 两圆环形是共形等价的, 当且仅当它们的半径之比相等.

2. 求证: $\alpha_{ij}=\alpha_{ji}$.

[提示: 应用第4章定理21.]

5.2 Green 函数

现在仍设Ω是具有有限连通数的一个域, 由于我们可以作过渡的共形映照, 因此可设Ω由解析围线$C_1, \cdots, C_n$围成; 这里$n=1$的情形也将包括在内.

考察一点$z_0\in\Omega$, 并以边值$\log|\zeta-z_0|$解Ω中的Dirichlet问题. 记解为$G(z)$, 但主要是研究函数$g(z)=G(z)-\log|z-z_0|$, 这一函数称为Ω的 Green 函数, 它在点z_0处有极点. 为了着重指出它依赖于z_0, 故将它记为$g(z, z_0)$.

Green 函数在Ω中除了点z_0以外, 是到处调和的, 且在边界上等于零. 在z_0的一个邻域中, 它与$-\log|z-z_0|$相差一调和函数. 根据这些性质, $g(z)$是唯一地确定的. 因为, 如$g_1(z)$具有同样的性质,则$g-g_1$在整个Ω中调和,而在边界上等于零. 根据极值原理,可知g_1恒等于g.

如两个域是共形等价的, 则具有对应极点的 Green 函数在互相对应的点上是相等的. 更明确地说,设$z=z(\zeta)$定义一个把ζ平面中的域Ω'映成z平面中域Ω的一一共形映照.选择一点$\zeta_0\in\Omega'$,

并以 $g(z, z_0)$ 表示 Ω 的 Green 函数，其极点在 $z_0=z(\zeta_0)$. 则 $g(z(\zeta), z_0)$就是 Ω' 的 Green 函数. 为了证明这一点，先看如果 ζ 趋近于一边界点，则 $z(\zeta)$趋近于 Ω 的边界，因此 $g(z(\zeta), z_0)$ 的边值为 0. 至于在 ζ_0 处的性态，因 $g(z(\zeta), z_0)$与 $-\log|z(\zeta)-z(\zeta_0)|$ 之差是 $z(\zeta)$ 的一个调和函数，因此也是 ζ 的调和函数. 但因差 $\log|z(\zeta)-z(\zeta_0)|-\log|\zeta-\zeta_0|$ 也是调和的，故知 $g(z(\zeta), z_0)$在 ζ_0 处有所需的性态. 这就证明 Green 函数在共形映照下保持**不变**，根据这一不变性，随意作过渡的共形映照当然是可以的.

在单连通域的情形，在 Green 函数与 Riemann 映照函数之间有一简单关系. 对于单位圆盘 $|w|<1$, 关于原点的 Green 函数显然为 $-\log|w|$. 因此，如 $w=f(z)$将 Ω 映成单位圆盘，而 z_0 映成原点，则根据不变性，得

$$g(z, z_0)=-\log|f(z)|.$$

反之，如 $g(z, z_0)$为已知，则映照函数也可以确定.

Green 函数具有一重要的对称性质. 给定两点 $z_1, z_2\in\Omega$, 为简单起见，令 $g(z, z_1)=g_1$, $g(z, z_2)=g_2$. 根据第 4 章定理 21 可知，微分 $g_1{}^*dg_2-g_2{}^*dg_1$ 在一个从 Ω 除去点 z_1, z_2 后所成的域中是局部正合的. 如 c_1 及 c_2 是取正向的两个小圆，圆心分别为 z_1 及 z_2, 则闭链 $C-c_1-c_2$ 同调于零（如前，$C=C_1+\cdots+C_n$）. 由于 g_1, g_2 在 C 上等于零，故知

$$\int_{c_1+c_2} g_1{}^*dg_2-g_2{}^*dg_1=0.$$

命 $G_1=g_1+\log|z-z_1|$, 则 ${}^*dg_1={}^*dG_1-d\arg(z-z_1)$, 于是

$$\int_{c_1} g_1{}^*dg_2-g_2{}^*dg_1=\int_{c_1} G_1{}^*dg_2-g_2{}^*dG_1-\int_{c_1}\log|z-z_1|{}^*dg_2$$
$$+\int_{c_1} g_2\,d\arg(z-z_1).$$

上式右侧第一个积分等于零，因为 G_1 和 g_2 在 c_1 内是调和的，第二个积分也等于零，因为 $|z-z_1|$ 在 c_1 上是常数，而且 ${}^*dg_2$ 在 z_1 的一个邻域中是一正合微分. 最后一积分根据调和函数的均值性质可知等于 $2\pi g_2(z_1)$. 同理可得沿 c_2 的积分为 $-2\pi g_1(z_2)$, 这就证

明了 $g_2(z_1)-g_1(z_2)=0$, 或

$$g(z_1,\ z_2)=g(z_2,\ z_1).$$

由于这一对称性质, 故知 Green 函数 $g(z,\ z_0)$ 也是第二变数的调和函数.

$g(z,\ z_0)$的共轭函数当然是多值的, 记为 $h(z,\ z_0)$. 在以 z_0 为圆心的一个小圆 c 上, 它具有周期 2π. 此外, 它具有周期

$$P_k(z_0)=\int_{C_k} dh(z,\ z_0)=\int_{C_k} {}^*dg(z,\ z_0) \quad (k=1,\ \cdots,\ n).$$

引理 3 周期 $P_k(z_0)$等于调和测度 $\omega_k(z_0)$乘 2π.

这一关系的证明仍可应用第 4 章定理 21. $\omega_k{}^*dg-g{}^*d\omega_k$ 沿 $C-c$ 的积分等于零. 沿 C 的积分等于 $P_k(z_0)$, 而沿 c 的积分用上面同样的计算方法可知为 $2\pi\omega_k(z_0)$. 这就证明了

$$P_k(z_0)=2\pi\omega_k(z_0).$$

5.3 具有平行缝的域

比前面更明显一些, 我们令

$$g(z,\ z_0)=G(z,\ z_0)-\log|z-z_0|, \tag{16}$$

其中 $z_0=x_0+iy_0\in\Omega$. 我们知道 $G(z,\ z_0)$是对称的, 并且关于每个变量都是调和的; 作为 z 的函数, 它有边值 $\log|\zeta-z_0|$.

考察差商 $Q(z,\ h)=(G(z,\ z_0+h)-G(z,\ z_0))/h$, 其中 h 是实的, 并取得如此小, 使 z_0+h 仍属于 Ω. 这是 z 的一个调和函数, 有边值$(\log|\zeta-z_0-h|-\log|\zeta-z_0|)/h$. 当 $h\to 0$ 时, 这些边值一致地趋于 $\partial/\partial x_0\log|\zeta-z_0|=-\mathrm{Re}\,1/(\zeta-z_0)$. 由极值原理可知, $Q(z,\ h)$ 不仅在紧致集上, 而且在整个 Ω 上一致地趋于极限 $(\partial/\partial x_0)G(z,\ z_0)$. 这样, 如果我们把边值一并考虑, 就得到闭包 Ω^- 上的一致收敛性, 这里 Ω^- 是一个紧致集. 结论是: 作为 z 的函数, $(\partial/\partial x_0)G(z,\ z_0)$在 Ω 内调和, 并有边值 $-\mathrm{Re}\,1/(\zeta-z_0)$. 如果与(16)比较, 就知道 $u_1(z)=(\partial/\partial x_0)g(z,\ z_0)$对 $z\neq z_0$ 调和, 在边界上保持为零, 并与 $\mathrm{Re}\,1/(z-z_0)$相差一个调和函数.

$u_1(z)$的共轭函数在围线 C_k 上具有某些周期 A_k. 不过, 我们

不难作出 $u_1(z)$ 与调和测度 $\omega_j(z)$ 的一个线性组合，使它的共轭函数的周期为零. 实际上，函数 $u_1+\lambda_1\omega_1+\cdots+\lambda_{n-1}\omega_{n-1}$ 就具有这一性质，只要

$$\lambda_1\alpha_{1k}+\lambda_2\alpha_{2k}+\cdots+\lambda_{n-1}\alpha_{n-1,k}=-A_k \quad (k=1, \cdots, n-1).$$

我们已经知道这一非齐次方程组恒有一个解. 因此，就确立了函数 $p(z)$ 的存在，这一函数除了在 z_0 处具有一单极点，其留数为 1 之外，在 Ω 内单值且解析，它的实部在每一围线上都是常数. 根据这些条件，$p(z)$ 除了一个附加常数外，是唯一地确定的.

如对 y_0 求导，则完全类似地可得出结论：$v_2(z)=-(\partial/\partial y_0)\cdot g(z, z_0)$ 在边界上等于零，并与 $\operatorname{Im} 1/(z-z_0)$ 有同样的奇性. 如加上一适当的调和测度的线性组合，则共轭函数将是单值的. 故知存在一单值的解析函数 $q(z)$，其奇部为 $1/(z-z_0)$，其虚部在每一围线上是常数.

由函数 $p(z)$ 及 $q(z)$ 可得简单的典型映照.

定理 11 由 $p(z)$ 及 $q(z)$ 所确定的映照是一对一的，Ω 的象是一带有裂缝的域，它的余集分别由 n 条垂直的或水平的线段组成(图 6-5a、b).

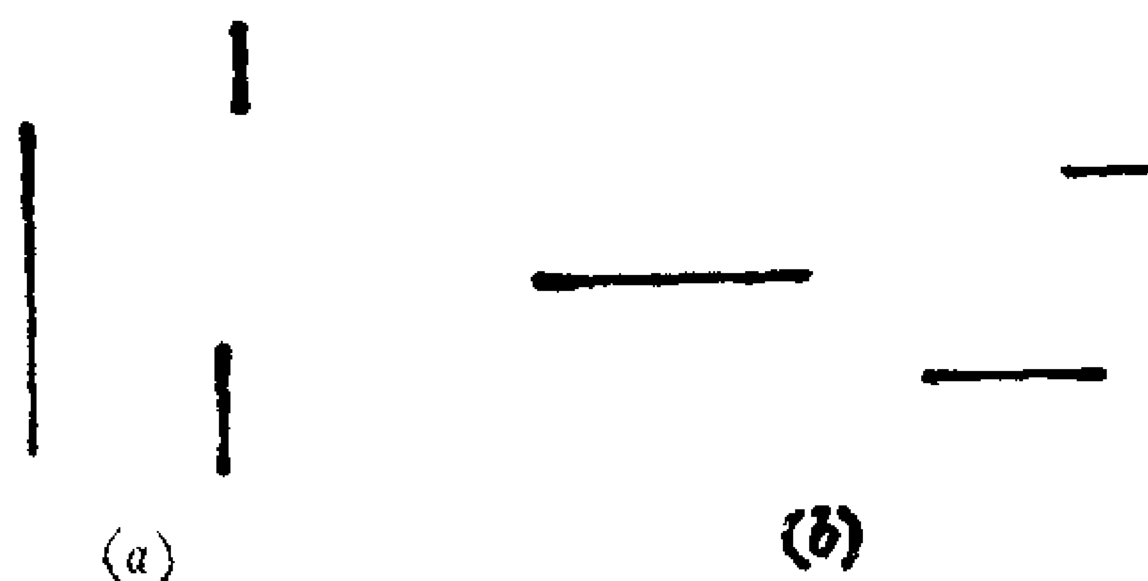


图 6-5 有平行缝的域

这一定理的证明完全与定理 10 的证明相仿. 这时表达式

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_k}\frac{p'(z)dz}{p(z)-w_0} \tag{17}$$

所表示的是 $p(z)-w_0$ 的零点数减去其极点数. 但不难看出，(17) 式对所有的 w_0，包括边值在内，都等于零. 在边值的情况下，应取主值，但如 w_0 取在 C_k 上，则 $p'dz/(p-w_0)$ 的虚部在 C_k 上等于

零，因此就不会有困难．由于这里肯定只有一个极点，故知 $p(z)$ 在 Ω 的内部取每一值一次，在边界上取每一值二次，或视重复度为 2 时在边界上取每一值一次．至于证明的其余部分就与上面的完全一样．对于 $q(z)$，同样的证明也正确．

具有平行缝的域可当作典型域，但它们不都是共形等价的，即使要求 ∞ 点对应于 ∞ 点时也如此．例如，由 $p(z)$ 及 $iq(z)$ 所作的映照映出不同的直缝域，但都是共形等价的．除了一平行的平移之外，裂缝的映照只是对在 z_0 处具有同样留数的映照而言，才是唯一确定的．

习　题

1．证明：对于 $z\neq z_0$，$g(z, z_0)$是关于两个变量同时连续的．

［提示：对 $G(z, z_0)$应用极值原理．］

2．证明函数 $e^{-i\alpha}(q\cos\alpha+ip\sin\alpha)$将 Ω 映成一个由一些斜缝围成的域．

*3．用习题 2 证明 $p+q$ 将 Ω 一对一地映成一个由凸围道围成的域．

［注：(i) 一条闭曲线称为凸的，如果它与每一条直线至多相交两次．

(ii) 要证明 C_k 在 $p+q$ 下的象是凸的，只须证明，对任一个 α，函数 $\operatorname{Re}(p+q)e^{i\alpha}$ 在 C_k 上取值不超过两次．但 $\operatorname{Re}(p+q)e^{i\alpha}$ 与 $\operatorname{Re}(q\cos\alpha+ip\sin\alpha)$ 只差一个常数，而所要的结论由习题 2 中映照函数的性质即可推得．

(iii) 最后，可用幅角原理证明：围道 C_k 的象关于 $p+q$ 的所有值都有环绕次数 0．特别，这意味着凸的曲线彼此互不相交．］

第7章 椭圆函数

1 单周期函数

函数$f(z)$称为是**周期的**，周期为$\omega\neq 0$，如果对所有z，

$$f(z+\omega)=f(z).$$

例如，e^z具有周期$2\pi i$，$\sin z$与$\cos z$具有周期2π. 更精确地说，我们只感兴趣于解析的或亚纯的函数$f(z)$，并且在一个域Ω中考察它们，而域Ω经变换$z\to z+\omega$映成自身.

如果ω是一个周期，那末所有它的整倍数$n\omega$也都是周期. 另外还可有别的周期，但目前我们专门集中注意于周期$n\omega$. 从这一观点看，我们将称$f(z)$是一个具周期ω的**单周期函数**. 特别，ω本身是否是另一周期的倍数，那是无关紧要的.

1.1 用指数函数表示

周期为ω的最简单函数是指数函数$e^{2\pi iz/\omega}$. 一个基本事实是：任何具周期ω的函数都可用这一特殊函数表示.

设Ω是一个具下述性质的域，即$z\in\Omega$蕴涵$z+\omega\in\Omega$和$z-\omega\in\Omega$. 在ζ-平面上定义Ω'为Ω在映照$\zeta=e^{2\pi iz/\omega}$下的象；显然Ω'是一个域. 例如，若Ω是整个平面，则Ω'是挖掉0的平面. 若Ω是一个平行缝，由$a<\mathrm{Im}(2\pi z/\omega)<b$定义，则$\Omega'$是圆环$e^{-b}<|\zeta|<e^{-a}$.

假设$f(z)$在Ω中亚纯并具有周期ω. 则在Ω'中存在唯一一个函数F，使得

$$f(z)=F(e^{2\pi iz/\omega}). \tag{1}$$

事实上，为确定$F(\zeta)$，令$\zeta=e^{2\pi iz/\omega}$，则除了相差ω的一个倍数

外，z 是唯一的，而 ω 的这个倍数并不影响值 $f(z)$. 显见 F 是亚纯的. 反之，如果 F 是在 Ω' 中亚纯的，则 (1) 确定一个具周期 ω 的亚纯函数 f.

1.2 Fourier 展开

假设 Ω' 包含一个环 $r_1<|\zeta|<r_2$, 在其中 F 设有极点. 在这环中，F 有 Laurent 展开

$$F(\zeta)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\zeta^n,$$

从而得到

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{2\pi inz/\omega}.$$

这是 $f(z)$ 的复 Fourier 展开，在对应于给定环的平行缝中有效.

系数（参看第 5 章第 1.3 节）由下式给出：

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=r}F(\zeta)\zeta^{-n-1}d\zeta \quad (r_1<r<r_2),$$

作变量变换，上式变为

$$c_n=\frac{1}{\omega}\int_a^{a+\omega}f(z)e^{-2\pi inz/\omega}dz.$$

这里 a 是平行缝中的一个任意的点，而积分是沿着从 a 到 $a+\omega$ 并保持在缝内的任一路径进行的. 如果 $f(z)$ 在整个平面中解析，则同一 Fourier 展开到处成立.

1.3 有穷阶函数

当 Ω 是整个平面时，$F(\zeta)$ 在 $\zeta=0$ 与 $\zeta=\infty$ 有孤立奇点. 如果这两个奇点都不是本性奇点，就是说，它们或者是可去奇点，或者是极点，那末 F 是一个有理函数. 这时我们说 f 具有有穷的阶，等于 F 的阶.

我们记得，一个有理函数取每一个复数值包括 ∞ 的次数是相同的，只要我们遵守通常关于重数的约定. 同样，对于有穷阶单周期函数，如果我们对 z 与 $z+\omega$ 不作区别，就得到一个类似结果. 用一个方便的术语，我们说 $z+n\omega$ 等价于 z. 如果 f 是 m 阶的，则它

将在 m 个不等价的点上取到每一个复数值 $c \neq F(0)$ 与 $F(\infty)$，重数重复计数. 我们还注意到，当 $\mathrm{Im}(z/\omega) \to -\infty$ 时，$f(z) \to F(0)$，而当 $\mathrm{Im}(z/\omega) \to \infty$ 时，$f(z) \to F(\infty)$. 如果我们把这些值也当作它"取到"的值（具有固有的重数），那就可以保持所有复数值恰好取到 m 次的说法.

对于另一种解释，我们可以考虑由 $0 \leqslant \mathrm{Im}(z/\omega) < 2\pi$ 所定义的周期缝. 由于这一缝只包含每一等价类中的一个代表，故 $f(z)$ 在周期缝中取每一复数值 m 次，但值 $F(0)$ 与 $F(\infty)$ 除外，它们需要作特殊约定.

2 双周期函数

术语椭圆函数与双周期函数是互通的；我们在讨论矩形和某些三角形的共形映照时已遇到过这种函数的例子（第 6 章，第 2 节）. 椭圆函数曾经是广泛研究的对象，一方面是由于它们所具有的函数论性质，另一方面是由于它们在代数与数论中的重要作用. 我们引论性的题材只包括一些最基本的方面.

2.1 周期模

设 $f(z)$ 是整个平面内的亚纯函数. 我们要研究它的所有周期组成的集 M. 如果 ω 是一周期，那末它的所有整倍数 $n\omega$ 也都是周期；而若 ω_1、ω_2 属于 M，则 $\omega_1+\omega_2$ 也属于 M；因此，所有的线性组合 $n_1\omega_1+n_2\omega_2$ 也属于 M. 在代数中，具有这些性质的集称为一个模（更精确地，对整数的模），我们称 M 为 f 的周期模.

除了常数函数这一平凡情形之外，M 还具有一种拓扑性质：它的所有点都是孤立的. 事实上，由于对所有的 $\omega \in M$ 有 $f(\omega) = f(0)$，因此，一个有穷聚点的存在直接蕴涵着 f 是常数. 一个具孤立点的模称为是离散的.

我们的第一步是确定所有的离散模.

定理 1 一个离散模或者由零单独组成，或者由一个复数

$\omega\neq 0$ 的整倍数 $n\omega$ 组成，或者由两数 ω_1、ω_2 的所有整系数线性组合 $n_1\omega_1+n_2\omega_2$ 组成，这里，比 ω_1/ω_2 非实数.

只要 M 包含一数 $\omega\neq 0$，它必也包含一数，其绝对值为最小，称它为 ω_1. 事实上，如果 r 足够大，则圆盘 $|z|\leqslant r$ 包含 M 中异于 0 的一点. 由于 M 中的点都是孤立的，所以这种点只有有穷多个，我们选择 ω_1 为最靠近原点的点(读者可以证明这里总有 2, 4, 或 6 个最靠近的点). 倍数 $n\omega_1$ 也都属于 M，而这些可能是全部了.

现在假设存在一个 $\omega\in M$，它不是 ω_1 的整倍数. 在所有这样的 ω 中，有一个，其绝对值是最小的，设为 ω_2. 我们断言 ω_2/ω_1 不是实数. 如果它是实数，则将有一个整数 n 使得 $n<\omega_2/\omega_1<n+1$. 这样将有 $0<|n\omega_1-\omega_2|<|\omega_1|$. 这是一个显然的矛盾.

现在可以断言，M 中的所有数都有形式 $n_1\omega_1+n_2\omega_2$. 首先，由于 ω_2/ω_1 非实数，所以任何复数 ω 可写成形式 $\lambda_1\omega_1+\lambda_2\omega_2$，其中 λ_1、λ_2 都是实数. 为看出这一点，只须解方程组

$$\omega=\lambda_1\omega_1+\lambda_2\omega_2,$$
$$\bar{\omega}=\lambda_1\bar{\omega}_1+\lambda_2\bar{\omega}_2.$$

由于行列式 $\omega_1\bar{\omega}_2-\omega_2\bar{\omega}_1$ 不等于零，故方程组有唯一的一组解 (λ_1, λ_2)；但 $(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2)$ 也是一组解，因此 λ_1 与 λ_2 必是实数. 为继续进行证明，存在整数 m_1、m_2，使得 $|\lambda_1-m_1|\leqslant\frac{1}{2}$, $|\lambda_2-m_2|\leqslant\frac{1}{2}$. 如果 $\omega\in M$，则

$$\omega'=\omega-m_1\omega_1-m_2\omega_2$$

也属于 M. 我们有 $|\omega'|<\frac{1}{2}|\omega_1|+\frac{1}{2}|\omega_2|\leqslant|\omega_2|$，其中第一个不等式是严格不等式，因为 ω_2 不是 ω_1 的实数倍数. 根据 ω_2 的选定方式，故知 ω' 必是 ω_1 的一个整倍数，因此 ω 具有所断言的形式.

2.2 幺模变换

下面我们假定出现的是定理 1 中的第三种情况. (ω_1, ω_2) 具

有这样的性质：任一 $\omega \in M$ 有唯一的表示，其形式为 $\omega = n_1\omega_1 + n_2\omega_2$. 具有这一性质的任一数对称为 M 的一组基（即使它的构造在定理 1 的证明中没有被确定）.

我们来研究两组基 (ω_1, ω_2) 与 (ω_1', ω_2') 之间的关系. 由于 (ω_1, ω_2) 是一组基, 故存在整数 a, b, c, d, 使得

$$\begin{aligned} \omega_2' &= a\omega_2 + b\omega_1, \\ \omega_1' &= c\omega_2 + d\omega_1. \end{aligned} \tag{2}$$

最好我们把这两个方程写成矩阵形式

$$\begin{pmatrix} \omega_2' \\ \omega_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_2 \\ \omega_1 \end{pmatrix}.$$

对于复共轭, 同样的关系成立, 这样就有

$$\begin{pmatrix} \omega_2' & \overline{\omega_2'} \\ \omega_1' & \overline{\omega_1'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_2 & \overline{\omega}_2 \\ \omega_1 & \overline{\omega}_1 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

由于 (ω_1', ω_2') 也是一组基, 所以类似地得到

$$\begin{pmatrix} \omega_2 & \overline{\omega}_2 \\ \omega_1 & \overline{\omega}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_2' & \overline{\omega_2'} \\ \omega_1' & \overline{\omega_1'} \end{pmatrix}, \tag{4}$$

其中 a', b', c', d' 为整数.

从 (3) 和 (4) 得

$$\begin{pmatrix} \omega_2 & \overline{\omega}_2 \\ \omega_1 & \overline{\omega}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_2 & \overline{\omega}_2 \\ \omega_1 & \overline{\omega}_1 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

这里行列式 $\omega_2\overline{\omega}_1 - \omega_1\overline{\omega}_2 \neq 0$, 因为不然的话, 模中任两数之比将为实数, 这与假设矛盾. 行列式 $\neq 0$ 的矩阵必有逆, 如果用 $\begin{pmatrix} \omega_2 & \overline{\omega}_2 \\ \omega_1 & \overline{\omega}_1 \end{pmatrix}$ 的逆去乘 (5), 就得到

$$\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

矩阵 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ 互为逆矩阵. 特别是, 它们的行列式必须满足

$$\begin{vmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 1,$$

而由于两个都是整数,所以必有

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{vmatrix} = \pm 1.$$

形如(2)的线性变换如具有整系数，且行列式等于 ±1，则这样的线性变换称为是幺模的．我们已经证明了：

同一模的任两组基由一幺模变换相联系．

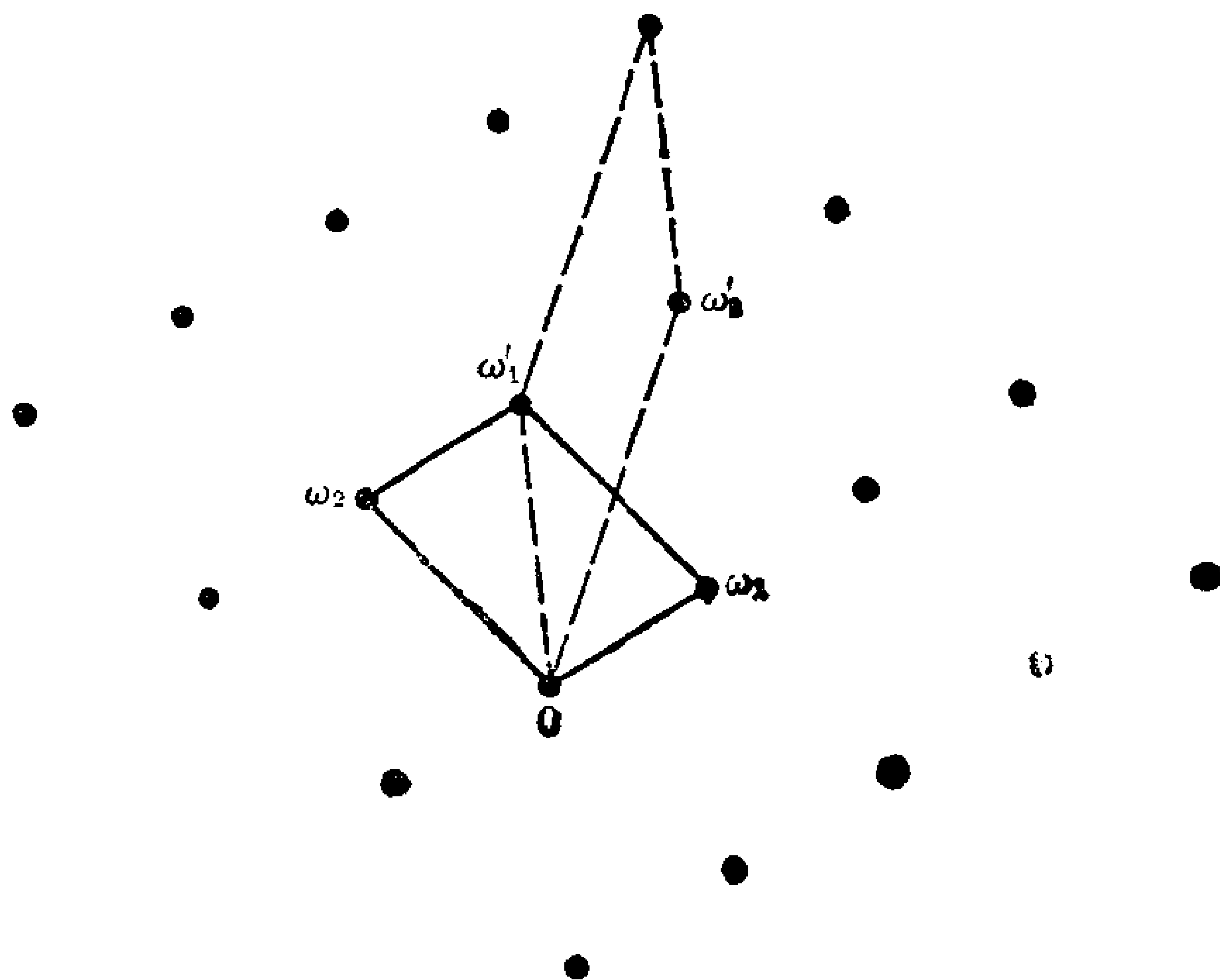


图 7-1 周期模

几何上，自然要考虑由一组基 (ω_1, ω_2) 张成的平行四边形在模的所有数形成的点阵中的关系．图 7-1 表示同一模的两组基．注意,两个平行四边形有相等的面积．

应当指出，幺模矩阵，或对应的线性变换，形成一个群，称为模群．

2.3 典型基

在 M 的所有可能的基之间，可以抽出几乎是唯一的一组，称为典型基．使用这样一组特殊的基,并不总是必要的,甚至也不是值得想望的，但重要的是要知道它是存在的． 除了一些小的调整之外,它将是定理 1 证明过程中引进的基．

定理 2 存在一组基 (ω_1, ω_2)，使得比 $\tau = \omega_2/\omega_1$ 满足下列条

件：(i) $\operatorname{Im}\tau>0$；(ii) $-\frac{1}{2}<\operatorname{Re}\tau\leqslant\frac{1}{2}$；(iii) $|\tau|\geqslant1$；(iv) 如果 $|\tau|=1$，则 $\operatorname{Re}\tau\geqslant0$. 比值 τ 由这些条件唯一确定，而有二个、四个或六个对应的基可供选择.

证 如同在定理 1 的证明中一样，选 ω_1 与 ω_2，则 $|\omega_1|\leqslant|\omega_2|$，$|\omega_2|\leqslant|\omega_1+\omega_2|$，且 $|\omega_2|\leqslant|\omega_1-\omega_2|$. 用 τ 表示，这些条件就等价于 $|\tau|\geqslant1$ 和 $|\operatorname{Re}\tau|\leqslant\frac{1}{2}$. 如果 $\operatorname{Im}\tau<0$，则用 $(-\omega_1, \omega_2)$ 代替 (ω_1, ω_2)；这使得 $\operatorname{Im}\tau>0$，但不改变 $\operatorname{Re}\tau$ 的条件. 如果 $\operatorname{Re}\tau=-\frac{1}{2}$，则将基换为 $(\omega_1, \omega_1+\omega_2)$，而如果 $|\tau|=1$，$\operatorname{Re}\tau<0$，则将基换为 $(-\omega_2, \omega_1)$. 经过这些小的改动之后，所有的条件都得到满足.

几何上，条件 (i) 至 (iv) 表示点 τ 位于图 7-2 所示的那一部分复平面中. 它由圆 $|\tau|=1$ 和铅直线 $\operatorname{Re}\tau=\pm\frac{1}{2}$ 围成，但只包括边界的一部分. 虽然这集不是开的，但称它为幺模群的基本区域.

我们已经看到，最一般的基的变换是由幺模变换实现的变换. 如果新的比是 τ'，则

$$\tau'=\frac{a\tau+b}{c\tau+d}, \tag{6}$$

其中 $ad-bc=\pm1$. 经过简单的计算，得到

$$\operatorname{Im}\tau'=\frac{\pm\operatorname{Im}\tau}{|c\tau+d|^2}, \tag{7}$$

其中正负号应取得与 $ad-bc$ 相同.

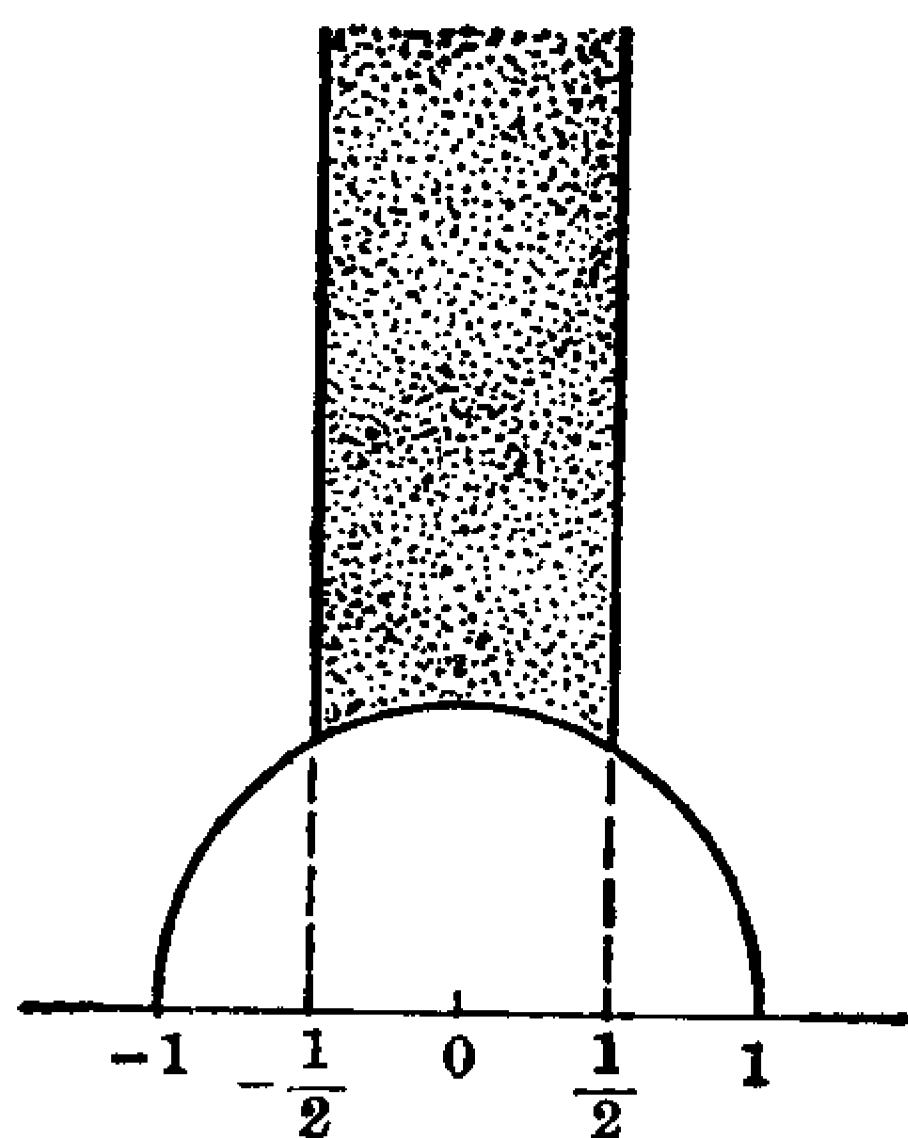


图 7-2 τ-平面

假设 τ 和 τ' 都位于基本区域中. 我们来证明，这时它们必相等. 首先注意到，在 (7) 中成立的是正号，因此 $ad-bc=1$. 其次，由于 τ、τ' 是对称的，故不妨假设 $\operatorname{Im}\tau'\geqslant\operatorname{Im}\tau$. 于是从 (7) 可知 $|c\tau+d|\leqslant1$. 但 c 与 d 都是整数，所以要这一不等式成立，只有极少几种可能.

一种可能是$c=0$, $d=\pm1$. 关系$ad-bc=1$化为$ad=1$, 而由于a与d都是整数, 所以或者$a=d=1$, 或者$a=d=-1$. 方程(6)变为$\tau'=\tau\pm b$, 由条件(ii)可知$|b|=|\mathrm{Re}\,\tau'-\mathrm{Re}\,\tau|<1$. 因此, 由于$b$是整数, 有$b=0$, $\tau'=\tau$.

现在假设$c\neq0$. 条件$|\tau+d/c|\leqslant1/|c|$蕴涵着$|c|=1$, 因为如果$|c|\geqslant2$, 那末点τ到实轴的距离将$\leqslant\frac{1}{2}$, 这显然不可能, 因为基本区域中到实轴最近点的距离是$\sqrt{3}/2$. 这样就有$|\tau\pm d|\leqslant1$, 看一下图7-2就知道这只能在$d=0$或$d=\pm1$时出现. 不等式$|\tau+1|\leqslant1$决不能满足, 因为点$e^{2\pi i/3}$不在基本区域中, 而不等式$|\tau-1|\leqslant1$仅当$\tau=e^{\pi i/3}$时成立. 在后一种情况下, $|c\tau+d|=1$, 于是由(7)可知$\mathrm{Im}\,\tau'=\mathrm{Im}\,\tau$, 因此, 由基本区域的形状知$\tau'=\tau$.

现在只剩情形$d=0$, $|c|=1$. 条件$|\tau|\leqslant1$连同(iii)表明$|\tau|=1$. 从$bc=-1$可知$b/c=-1$且$\tau'=\pm a-\frac{1}{\tau}=\pm a-\bar{\tau}$. 所以$\mathrm{Re}(\tau+\tau')=\pm a$, 而由(ii)知, 这仅当$a=0$时才可能, 在$a=0$时$\tau'=-1/\tau$. 于是与(iv)矛盾, 除非$\tau=\tau'=i$.

我们证明了τ是唯一的. 典型基(ω_1, ω_2)总可以换为$(-\omega_1, -\omega_2)$. 为要其他的基具相同的τ, 必须而且只须τ是幺模变换(6)的一个不动点. 这只在$\tau=i$或$\tau=e^{\pi i/3}$时出现; 前者是$-1/\tau$的一个不动点, 后者是$-(\tau+1)/\tau$与$-1/(\tau+1)$的不动点. 这些就是定理中考虑到的多重选择.

2.4 椭圆函数的一般性质

下面, $f(z)$表示一个亚纯函数, 它容许以基(ω_1, ω_2)为周期的M中包含所有的数. 我们不假设基是典型的, 也不要求M包含全部周期.

为方便计, 我们称z_1迭合(同余)于z_2, 记为$z_1\equiv z_2(\mathrm{mod}\ M)$, 如果差$z_1-z_2$属于$M$, 即$z_1=z_2+n_1\omega_1+n_2\omega_2$, 函数$f$在各个迭合的点上取同一值, 因而可把$f$看作同余类上的一个函数. 使用这一性质的一个具体方法是把函数限制在一个平行四边形P_a上, 这

四边形的顶点是 a, $a+\omega_1$, $a+\omega_2$, $a+\omega_1+\omega_2$. 使用这个平行四边形，包括它的一部分边界，就可以把每一同余类恰好用 P_a 中一点来表示，于是 f 由它在 P_a 上的值完全确定. 至于 a 的选择，那是无关紧要的，我们留着让它自由取定，以便做到使 f 在 P_a 的边界上没有极点.

定理 3 一个没有极点的椭圆函数必是常数.

如果 $f(z)$ 没有极点，则它约束在 P_a 的闭包上，因而在整个平面内是有界的. 由 Liouville 定理(第 4 章第 2.3 节)，它必化为常数.

由于诸极点没有聚点，所以在 P_a 中只能有有穷个极点. 当我们说一个椭圆函数的极点时，是指互不迭合的极点全体所成的一个完全集合. 重数按通常方式计数.

定理 4 一个椭圆函数的留数之和为零.

我们可以这样选取 a, 使得没有一个极点落在 P_a 的边界上. 如果边界 ∂P_a 是以正方向描出的，则在 P_a 内的极点上的留数之和等于

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial P_a} f(z)dz.$$

由于 f 有周期 ω_1、ω_2, 故积分等于零，因为沿平行四边形对边的积分互相抵消.

作为这定理的一个推论，不存在只有一个单极点的椭圆函数.

定理 5 一个不等于常数的椭圆函数，有多少个零点，就有多少个极点.

f 的极点和零点都是 f'/f 的单极点，而 f'/f 本身是一个椭圆函数. 重数是 f'/f 的留数，零点的为正，极点的为负. 于是定理即可由定理 4 推得.

如果 c 是任一常数，则 $f(z)-c$ 与 $f(z)$ 有相同的极点. 因此，所有各个值都取相同多的次数. 方程 $f(z)=c$ 的不重迭的根的个数称为椭圆函数的阶.

定理 6 一个椭圆函数的零点 $a_1, \cdots, a_n$ 与极点 $b_1, \cdots, b_n$ 满足关系

$$a_1+\cdots+a_n \equiv b_1+\cdots+b_n \pmod{M}.$$

为证明定理，考察积分

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial P_a} \frac{zf'(z)}{f(z)}\,dz, \tag{8}$$

这里我们仍可假设在边界上没有极点或零点. 根据留数定理，只要选取代表性的零点和极点都在 P_a 的内部，积分就等于 $a_1+\cdots+a_n-b_1-\cdots-b_n$. 考察从 a 到 $a+\omega_1$ 以及从 $a+\omega_2$ 到 $a+\omega_1+\omega_2$ 的边. 沿这两边的积分的对应部分可以写成

$$\frac{1}{2\pi i}\left(\int_a^{a+\omega_1}-\int_{a+\omega_2}^{a+\omega_1+\omega_2}\right)\frac{zf'(z)}{f(z)}\,dz=-\frac{\omega_2}{2\pi i}\int_a^{a+\omega_1}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz.$$

除了因子 $-\omega_2$ 之外，右端的积分表示当 z 从 a 变到 $a+\omega_1$ 时 $f(z)$ 所描的闭曲线环绕原点的环绕次数. 因此它必是一个整数. 对另一组对边，情况相同. 所以 (8) 的值有形式 $n_1\omega_1+n_2\omega_2$，定理得证.

3 Weierstrass 理论

最简单的椭圆函数是二阶的，这样的函数或者有一个二重极点，留数为零；或者有两个单极点，有相反的留数. 我们将介绍 Weierstrass 的经典例子，他选择一个具二重极点的函数作为系统研究的出发点.

3.1 Weierstrass $\mathscr{P}$-函数

我们可把极点放在原点，而且由于乘上一个常数因子显然无关紧要，所以可要求奇部为 z^{-2}. 如果 f 是椭圆函数，并且在原点和它的迭合点处只有这一个奇点，那末容易看到，f 必是一个偶函数. 事实上，$f(z)-f(-z)$ 具有相同的周期，而没有奇点. 所以它必化为一常数，令 $z=\omega_1/2$，就知这常数是零.

因为可以随意加一个常数，所以在原点附近的 Laurent 展开中，可选常数项为零. 经过这一规格化以后，$f(z)$ 就是唯一确定的，习惯上用一特殊的记号 $\mathscr{P}(z)$ 表示. Laurent 展开具有形式

$$\mathscr{P}(z)=z^{-2}+a_1z^2+a_2z^4+\cdots.$$

到此为止这都是假设性的，因为我们尚未证明具有这一展开式的椭圆函数是否存在. 在这样的情况下，我们将遵循通常的方法，即在假设存在的前提下导出一个显表示式. 我们的思路是用第 5 章 2 节的方法展成部分分式. 目的是要证明公式

$$\mathscr{P}(z)=\frac{1}{z^2}+\sum_{\omega\neq 0}\left(\frac{1}{(z-\omega)^2}-\frac{1}{\omega^2}\right), \tag{9}$$

其中和式取遍所有 $\omega=n_1\omega_1+n_2\omega_2$，但 0 除外. 注意，$(z-\omega)^{-2}$ 是在 ω 处的奇部，而减去 ω^{-2} 是为了保证收敛性.

我们的第一个任务是验证级数收敛. 不妨设 $|\omega|>2|z|$，则由直接估计，得

$$\left|\frac{1}{(z-\omega)^2}-\frac{1}{\omega^2}\right|=\left|\frac{z(2\omega-z)}{\omega^2(z-\omega)^2}\right|\leqslant\frac{10|z|}{|\omega|^3}.$$

所以级数在任一紧致集上一致收敛，只要

$$\sum_{\omega\neq 0}\frac{1}{|\omega|^3}<\infty.$$

事实上，情况确实如此. 因为 ω_2/ω_1 不是实数，所以存在一个 $k>0$，使得 $|(n_1\omega_1+n_2\omega_2|\geqslant k(|n_1|+|n_2|)$ 对所有实的数对 (n_1,n_2) 成立. 如果只考虑整数，则有 $4n$ 对 (n_1,n_2) 适合 $|n_1|+|n_2|=n$. 这给出

$$\sum_{\omega\neq 0}|\omega|^{-3}\leqslant 4k^{-3}\sum_1^{\infty}n^{-2}<\infty.$$

下一步是证明(9)的右端具有周期 ω_1 与 ω_2. 直接验证相对来说是麻烦的. 改用如下办法，暂时令

$$f(z)=\frac{1}{z^2}+\sum_{\omega\neq 0}\left(\frac{1}{(z-\omega)^2}-\frac{1}{\omega^2}\right), \tag{10}$$

逐项导微，得

$$f'(z)=-\frac{2}{z^3}-\sum_{\omega\neq 0}\frac{2}{(z-\omega)^3}=-2\sum_{\omega}\frac{1}{(z-\omega)^3}.$$

最后一个和式显然是双周期的. 所以 $f(z+\omega_1)-f(z)$ 与 $f(z+\omega_2)-f(z)$ 都是常数. 由于 $f(z)$ 是偶函数(从(10)看出), 所以只要取 $z=-\omega_1/2$ 及 $z=-\omega_2/2$ 就可得出这些常数都是零. 这样就证明了 f 具有所说的周期.

现在得知 $\mathscr{P}(z)-f(z)$ 是一常数, 但根据在原点的展开式的形式可知这常数是零. 从而证明了 $\mathscr{P}(z)$ 的存在, 并证明了它可用级数(9)表示. 为便于参考, 我们写出重要公式

$$\mathscr{P}'(z)=-2\sum_{\omega}\frac{1}{(z-\omega)^3}. \tag{11}$$

3.2 函数 $\zeta(z)$ 与 $\sigma(z)$

由于 $\mathscr{P}(z)$ 具有零留数, 所以它是一个单值函数的导数. 习惯上把 $\mathscr{P}(z)$ 的反导数记为 $-\zeta(z)$, 并加以规格化, 使它是奇函数. 应用(9), 便得到显表达式

$$\zeta(z)=\frac{1}{z}+\sum_{\omega\neq 0}\left(\frac{1}{z-\omega}+\frac{1}{\omega}+\frac{z}{\omega^2}\right). \tag{12}$$

收敛是显然的, 因为除了项 $\frac{1}{z}$ 外, 沿着任何一条不通过各极点的路径从 0 到 z 积分, 就得到新的级数.

显然 $\zeta(z)$ 满足条件

$$\zeta(z+\omega_1)=\zeta(z)+\eta_1,\quad \zeta(z+\omega_2)=\zeta(z)+\eta_2,$$

其中 η_1 与 η_2 均为常数. 它们与 ω_1, ω_2 有一非常简单的关系. 为导出这关系, 我们任取一个 $a\neq 0$, 并注意到, 由留数定理有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial P_a}\zeta(z)\,dz=1.$$

这积分是容易算出的, 只要将沿着平行四边形两组对边的部分相加即可, 从而得到方程

$$\eta_1\omega_2-\eta_2\omega_1=2\pi i,$$

称为 Legendre 关系.

只要我们用一个指数函数来消除多值性, 积分还可进一步作出. 正象我们可以直接验证的那样, 乘积

$$\sigma(z)=z\prod_{\omega\neq 0}\left(1-\frac{z}{\omega}\right)e^{z/\omega+\frac{1}{2}(z/\omega)^2} \tag{13}$$

收敛并表示一个整函数，它满足

$$\sigma'(z)/\sigma(z)=\zeta(z).$$

公式(13)是 $\sigma(z)$ 的一个典型乘积表示.

当 z 换为 $z+\omega_1$ 或 $z+\omega_2$ 时，$\sigma(z)$ 如何变化？从

$$\frac{\sigma'(z+\omega_1)}{\sigma(z+\omega_1)}=\frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)}+\eta_1$$

立即可知

$$\sigma(z+\omega_1)=C_1\sigma(z)e^{\eta_1 z},$$

其中 C_1 是常数. 为确定这常数，注意 $\sigma(z)$ 是一个奇函数. 令 $z=-\omega_1/2$，就可确定 C_1 的值，而 $\sigma(z)$ 满足

$$\begin{aligned}\sigma(z+\omega_1)&=-\sigma(z)e^{\eta_1(z+\omega_1/2)},\\ \sigma(z+\omega_2)&=-\sigma(z)e^{\eta_2(z+\omega_2/2)}.\end{aligned} \tag{14}$$

习　题

1. 试证明任一具有周期 ω_1, ω_2 的偶椭圆函数可以表成形式:

$$C\prod_{k=1}^{n}\frac{\mathscr{P}(z)-\mathscr{P}(a_k)}{\mathscr{P}(z)-\mathscr{P}(b_k)}\quad (C=\text{常数}),$$

只要 0 既不是零点，也不是极点. 如果函数在原点或者等于零，或者变为无穷，问对应的形式如何？

2. 试证明任一具周期 ω_1, ω_2 的椭圆函数可以写成

$$C\prod_{k=1}^{n}\frac{\sigma(z-a_k)}{\sigma(z-b_k)}\quad (C=\text{常数}).$$

[提示: 用(14)及定理 6.]

3.3 微分方程

用公式(12)容易导出 $\zeta(z)$ 在原点的 Laurent 展开，然后经过导微就得到 $\mathscr{P}(z)$ 的对应展开式. 首先我们有

$$\frac{1}{z-\omega}+\frac{1}{\omega}+\frac{z}{\omega^2}=-\frac{z^2}{\omega^3}-\frac{z^3}{\omega^4}-\cdots,$$

对所有周期求和，得

$$\zeta(z)=\frac{1}{z}-\sum_{k=2}^{\infty}G_k z^{2k-1},$$

其中

$$G_k=\sum_{\omega\neq 0}\frac{1}{\omega^{2k}}.$$

注意，由于 ζ 是一个奇函数，所以各周期的奇次幂的对应和为零。因为

$$\mathscr{P}(z)=-\zeta'(z),$$

我们进一步得到

$$\mathscr{P}(z)=\frac{1}{z^2}+\sum_{k=2}^{\infty}(2k-1)G_k z^{2k-2}.$$

在下面的计算中，我们只写出一些有效的项，应当理解，省略的项都是高阶的：

$$\mathscr{P}(z)=\frac{1}{z^2}+3G_2z^2+5G_3z^4+\cdots$$

$$\mathscr{P}'(z)=-\frac{2}{z^3}+6G_2z+20G_3z^3+\cdots$$

$$\mathscr{P}'(z)^2=\frac{4}{z^6}-\frac{24G_2}{z^2}-80G_3+\cdots$$

$$4\mathscr{P}(z)^3=\frac{4}{z^6}+\frac{36G_2}{z^2}+60G_3+\cdots$$

$$60G_2\mathscr{P}(z)=\frac{60G_2}{z^2}+0+\cdots$$

从最后三行得

$$\mathscr{P}'(z)^2-4\mathscr{P}(z)^3+60G_2\mathscr{P}(z)=-140G_3+\cdots.$$

这里左端是一个双周期函数，而右端没有极点．所以得到

$$\mathscr{P}'(z)^2=4\mathscr{P}(z)^3-60G_2\mathscr{P}(z)-140G_3.$$

习惯上令 $g_2=60G_2$, $g_3=140G_3$，因而方程变为

$$\mathscr{P}'(z)^2=4\mathscr{P}(z)^3-g_2\mathscr{P}(z)-g_3. \tag{15}$$

这是 $w=\mathscr{P}(z)$ 的一个一阶微分方程．它可用下列公式明显地解出：

$$z=\int^w\frac{dw}{\sqrt{4w^3-g_2w-g_3}}+\text{const},$$

这表明 $\mathscr{P}(z)$ 是一个椭圆积分的逆．更确切地说，这种联系由下列

恒等式表示：

$$z-z_0=\int_{\mathscr{P}(z_0)}^{\mathscr{P}(z)}\frac{dw}{\sqrt{4w^3-g_2w-g_3}},$$

其中，积分路径是一条从 z_0 到 z 而不过 $\mathscr{P}'(z)$ 的零点和极点的路径在 $\mathscr{P}(z)$ 下的象，平方根前的符号应取得使它实际等于 $\mathscr{P}'(z)$.

这里应当提醒一下，我们在联系到矩形和某些三角形的共形映照（第 6 章第 2 节）时已经遇到过椭圆函数与椭圆积分之间的关系.

习　题

Weierstrass 函数满足很多恒等式，这些恒等式最好放在习题中处理. 它们的证明，或者通过两个具有相同极点与零点的椭圆函数的比较（当涉及 σ-函数时），或者通过具有相同奇部的椭圆函数的比较（当涉及 $\mathscr{P}$ 函数与 ζ 函数时）来进行. 下面的一系列公式是这样安排的：即我们只需要借助于这一方法一次.

1.

$$\mathscr{P}(z)-\mathscr{P}(u)=-\frac{\sigma(z-u)\sigma(z+u)}{\sigma(z)^2\sigma(u)^2}. \tag{16}$$

（用(14)证明右端是 z 的一个周期函数. 比较 Laurent 展式来确定乘法常数.）

2.

$$\frac{\mathscr{P}'(z)}{\mathscr{P}(z)-\mathscr{P}(u)}=\zeta(z-u)+\zeta(z+u)-2\zeta(z). \tag{17}$$

（取对数导数，从(16)推得.）

3.

$$\zeta(z+u)=\zeta(z)+\zeta(u)+\frac{1}{2}\,\frac{\mathscr{P}'(z)-\mathscr{P}'(u)}{\mathscr{P}(z)-\mathscr{P}(u)}. \tag{18}$$

（这是(17)式的一个对称化形式.）

4. $\mathscr{P}$ 函数的加法定理：

$$\mathscr{P}(z+u)=-\mathscr{P}(z)-\mathscr{P}(u)+\frac{1}{4}\left(\frac{\mathscr{P}'(z)-\mathscr{P}'(u)}{\mathscr{P}(z)-\mathscr{P}(u)}\right)^2. \tag{19}$$

（导微(18)得到一个包含 $\mathscr{P}''(z)$ 的公式. $\mathscr{P}''(z)$ 可用 (15) 来消去，因由 (15) 得 $\mathscr{P}''(z)=6\mathscr{P}^2-\frac{1}{2}g_2$. 对称化后即得(19). 注意，这是一个代数加法

定理，因为 $\mathscr{P}'(z)$ 与 $\mathscr{P}'(u)$ 可以通过 $\mathscr{P}(z)$ 与 $\mathscr{P}(u)$ 代数地表出.)

5. 证明 $$\mathscr{P}(2z)=\frac{1}{4}\left(\frac{\mathscr{P}''(z)}{\mathscr{P}'(z)}\right)^2-2\mathscr{P}(z).$$

6. 证明 $\mathscr{P}'(z)=-\sigma(2z)/\sigma(z)^4$.

7. 证明 $$\begin{vmatrix}\mathscr{P}(z) & \mathscr{P}'(z) & 1\\ \mathscr{P}(u) & \mathscr{P}'(u) & 1\\ \mathscr{P}(z+u) & -\mathscr{P}'(u+z) & 1\end{vmatrix}=0.$$

3.4 模函数 $\lambda(\tau)$

微分方程(15)也可写成

$$\mathscr{P}'(z)^2=4(\mathscr{P}(z)-e_1)(\mathscr{P}(z)-e_2)(\mathscr{P}(z)-e_3), \tag{20}$$

其中 e_1, e_2, e_3 是多项式 $4w^3-g_2w-g_3$ 的根.

为求出 e_k 的值，我们来确定 $\mathscr{P}'(z)$ 的零点. $\mathscr{P}(z)$ 的对称性和周期性蕴涵着 $\mathscr{P}(\omega_1-z)=\mathscr{P}(z)$. 因此 $\mathscr{P}'(\omega_1-z)=-\mathscr{P}'(z)$，从此得到 $\mathscr{P}'(\omega_1/2)=0$. 类似地，$\mathscr{P}'(\omega_2/2)=0$，还有 $\mathscr{P}'((\omega_1+\omega_2)/2)=0$. 数 $\omega_1/2$, $\omega_2/2$ 与 $(\omega_1+\omega_2)/2$ 是互不同余的模周期. 所以 $\mathscr{P}'$ 恰好有三个零点，而 $\mathscr{P}'$ 是三阶的，所以所有零点都是单重的. 与(20)比较即知，可令

$$e_1=\mathscr{P}(\omega_1/2),\quad e_2=\mathscr{P}(\omega_2/2),\quad e_3=\mathscr{P}((\omega_1+\omega)/2). \tag{21}$$

此外，极为重要的是，这些根都是相异的. 事实上，$\mathscr{P}(z)$ 以重数2取每一值 e_k，如果 e_k 之中有两个相等，那末该值就要被取4次，这与 $\mathscr{P}$ 是二阶的事实矛盾.

如果在 $\mathscr{P}(z)$ 的定义 (9) 中代入 $z=\frac{\omega_1}{2}$, $\frac{\omega_2}{2}$ 及 $\frac{\omega_1+\omega_2}{2}$，立即看到 e_k 都是 ω_1, ω_2 的 -2 阶齐次式(换言之，如果周期乘以 t，则 e_k 乘以 t^{-2}). 因此，量

$$\lambda(\tau)=\frac{e_3-e_2}{e_1-e_2} \tag{22}$$

只依赖于比 $\tau=\omega_2/\omega_1$，这已由我们的记法指出. 从(9)非常清楚，$\lambda(\tau)$ 是上半平面 $\operatorname{Im}\tau>0$ 中的两个解析函数的商. 由于 $e_1\neq e_2$，所以它是真正解析的，而不仅是亚纯的；由于 $e_2\neq e_3$，它决不等于0，又因为 $e_1\neq e_3$，它决不等于1.

我们来详细研究一下对 τ 的依赖性. 如果各周期都经受幺模变换

$$\begin{aligned}\omega_2'&=a\omega_2+b\omega_1,\\ \omega_1'&=c\omega_2+d\omega_1,\end{aligned}\tag{23}$$

那末首先, $\mathscr{P}$-函数在这变换下并不改变. 所以, 考虑到(20), 根 e_k 至多可以置换. 我们来看一下实际情况究竟如何. 从(23)显然可见, 如果 $a\equiv d\equiv 1 \pmod 2$, $b\equiv c\equiv 0 \pmod 2$, 那末 $\omega_1'/2\equiv\omega_1/2$ 和 $\omega_2'/2\equiv\omega_2/2$. 在这一条件下, e_k 并不改变, 因而证明了

$$\text{对于}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\pmod 2,\quad \lambda\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)=\lambda(\tau).\tag{24}$$

满足(24)中同余关系的变换, 组成模群 (见 2.2 节) 的一个子群, 称为**同余子群** mod 2. 方程(24)断言, $\lambda(\tau)$ 在这一子群下是不变的. 一般, 如果一个解析函数或亚纯函数在线性变换组成的群之下保持不变, 则称它是一个**自守函数**. 特别, 如果一个函数是关于模群的一个子群的自守函数, 则称它是一个**模函数**(或**椭圆模函数**).

我们还需要确定 $\lambda(\tau)$ 在一个不属于同余子群的模变换下的性态. 只要分别考虑 mod 2 同余于 $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ 的矩阵就够了, 因为其他的类型都可由这些矩阵合成. 在第一种情况下, 我们得到 $\omega_1'/2=(\omega_1+\omega_2)/2$ 与 $\omega_1'/2=\omega_1/2$, 这意味着 e_2 与 e_3 互换而 e_1 保持不动, 因此 λ 变到 $(e_2-e_3)/(e_1-e_3)=\lambda/(\lambda-1)$. 在第二种情形, $\omega_2'/2=\omega_1/2$, $\omega_1'/2=\omega_2/2$, 因而 e_1 与 e_2 互换而 λ 变到 $1-\lambda$. 代表的变换是 $\tau\to\tau+1$ 和 $\tau\to-1/\tau$. 我们看到 $\lambda(\tau)$ 满足函数方程

$$\lambda(\tau+1)=\frac{\lambda(\tau)}{\lambda(\tau)-1},\quad \lambda\left(-\frac{1}{\tau}\right)=1-\lambda(\tau).\tag{25}$$

3.5 $\lambda(\tau)$ 所作的共形映照

为方便起见, 下面我们使用规格化 $\omega_1=1$, $\omega_2=\tau$. 在周期的这一选择下, 从(9)和(21)得

$$\left.\begin{aligned}e_3-e_2&=\sum_{m,n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{\left(m-\frac{1}{2}+\left(n+\frac{1}{2}\right)\tau\right)^2}-\frac{1}{\left(m+\left(n-\frac{1}{2}\right)\tau\right)^2}\right],\\ e_1-e_2&=\sum_{m,n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{\left(m-\frac{1}{2}+n\tau\right)^2}-\frac{1}{\left(m+\left(n-\frac{1}{2}\right)\tau\right)^2}\right],\end{aligned}\right\} \tag{26}$$

其中，二重级数都是绝对收敛的．首先我们看到，当 τ 为纯虚数时，这些量都是实的（这对单独的 e_k 也是对的）．事实上，当将 τ 换为 $-\tau$ 时，除了项的次序重新排列之外，和保持不变．所以 $\lambda(\tau)$ 在虚轴上是实的．

由于 $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ 属于同余子群 mod 2，故有 $\lambda(\tau+2)=\lambda(\tau)$．换言之，$\lambda$ 有周期 2．在第 2 节中已经看到，这意味着 $\lambda(\tau)$ 可表为 $e^{\pi i\tau}$ 的函数．确定其 Fourier 展开是不难的，但我们只需证明当 $\operatorname{Im}\tau\to\infty$ 时，$\lambda(\tau)\to 0$．

为计算(26)，先对 m 求和．这一和可用公式

$$\frac{\pi^2}{\sin^2\pi z}=\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(z-m)^2}$$

（第 5 章 2.1 节(9)）明显地求出．我们立即得到

$$\left.\begin{aligned}e_3-e_2&=\pi^2\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\cos^2\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)\tau}-\frac{1}{\sin^2\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)\tau}\right),\\ e_1-e_2&=\pi^2\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\cos^2\pi n\tau}-\frac{1}{\sin^2\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)\tau}\right).\end{aligned}\right. \tag{27}$$

因为 $|\cos n\pi\tau|$ 及 $|\sin n\pi\tau|$ 可与 $e^{|n|\pi\operatorname{Im}\tau}$ 比较，级数对 $n\to+\infty$ 和 $n\to-\infty$ 都是快速收敛的，对 $\operatorname{Im}\tau\geqslant\delta>0$，收敛是一致的．

现在就可逐项取极限，得到 $e_3-e_2\to 0$，$e_1-e_2\to\pi^2$（从 $n=0$ 的项）．因此，当 $\operatorname{Im}\tau\to\infty$ 时，关于 τ 的实部，一致地有 $\lambda(\tau)\to 0$．由(25)的第二式还推知，当 τ 沿虚轴趋近于 0 时 $\lambda(\tau)\to 1$．

我们还需要知道，与 $e^{\pi i\tau}$ 相比，$\lambda(\tau)$ 趋于零的阶．从 (27) 可

知，e_3-e_2 中的首项是对应于 $n=0$ 和 $n=1$ 的项．这些项的和是

$$2\pi^2\left[\frac{4e^{\pi i\tau}}{(1+e^{\pi i\tau})^2}+\frac{4e^{\pi i\tau}}{(1-e^{\pi i\tau})^2}\right],$$

从此得到，当 $\operatorname{Im}\tau\to\infty$ 时，

$$\lambda(\tau)e^{-\pi i\tau}\to 16. \tag{28}$$

在图 7-3 中，域 Ω 由虚轴、直线 $\operatorname{Re}\tau=1$ 和圆 $\left|\tau-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$ 围成．变换 $\tau+1$ 将虚轴映成 $\operatorname{Re}\tau=1$，而 $1-\frac{1}{\tau}$ 将 $\operatorname{Re}\tau=1$ 映成

$$\left|\tau-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}.$$

由于 $\lambda(\tau)$ 在虚轴上是实的，故由(25)知，它在 Ω 的整个边界上是实的．又，在 Ω 内部，当 $\tau\to 0$ 时 $\lambda(\tau)\to 1$，而当 $\tau\to 1$ 时，$\lambda(\tau)\to\infty$．

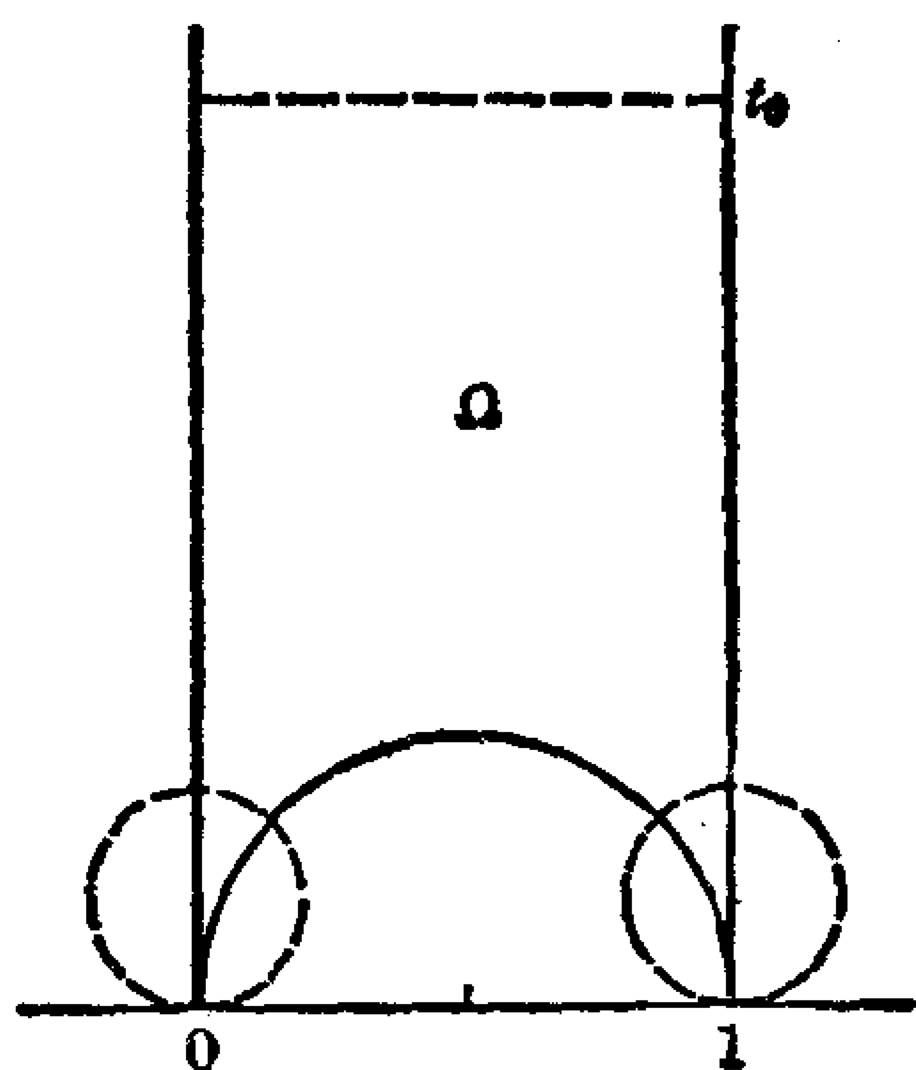


图 7-3

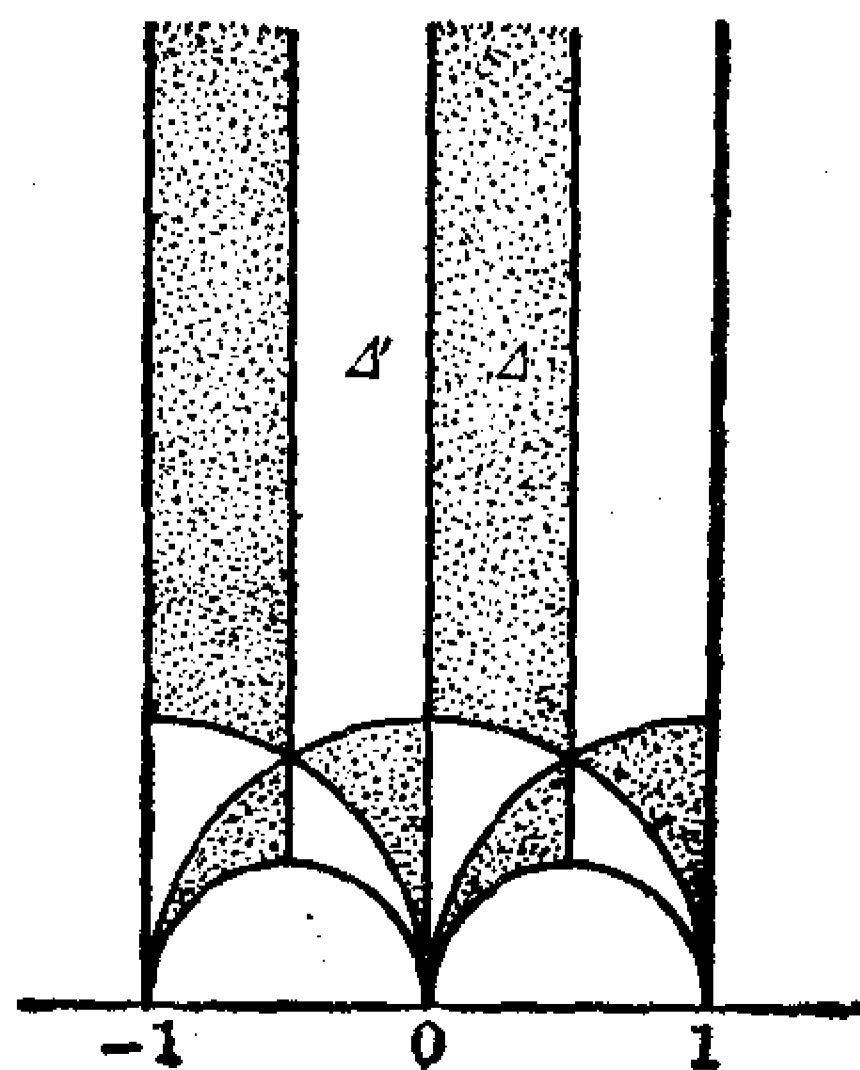


图 7-4　$\lambda(\tau)$的基本区域

我们用幅角原理来确定 $\lambda(\tau)$ 在 Ω 内取非实数值 w_0 的次数．用水平线段 $\operatorname{Im}\tau=t_0$ 和它在变换 $-1/\tau$ 与 $1-1/\tau$ 之下的象（这些象都是切于实轴的圆）割去 Ω 的隅角．对于充分大的 t_0，在被割去的那些部分中，显然有 $\lambda(\tau)\neq w_0$．靠近 $\tau=1$ 的圆被 $\lambda(\tau)$ 映成一曲线 $\lambda=\lambda(1-1/\tau)=1-1/\lambda(\tau)$，其中 $\tau=s+it_0$，$0\leqslant s\leqslant 1$；由于(28)，这近似地是上半平面中的一个大的半圆．现在很明显，挖去了隅角的域 Ω 的围道的象绕 w_0 的环绕次数，当 $\operatorname{Im}w_0>0$ 时是 1，而当 $\operatorname{Im}w_0<0$ 时是 0．结果，$\lambda(\tau)$ 在 Ω 内取上半平面中的

每一个值恰好一次，但不取下半平面中的值．这也足以保证 $\lambda(\tau)$ 在 Ω 的边界上是单调的．事实上，如果不是这样，那末导数 $\lambda'(\tau)$ 将在一个边界点处等于零，而要把该边界点的一个完全半圆形的邻域映入上半平面就将不可能．

定理 7 模函数 $\lambda(\tau)$ 实现将域 Ω 映成上半平面的一对一共形映照．映照连续地延拓到边界，使 $\tau=0, 1, \infty$ 对应于 $\lambda=1, \infty, 0$．

设 Ω' 是 Ω 关于虚轴的对称域，通过反射，将 Ω' 映成下半平面，这样，Ω' 与 Ω 一起对应于整个平面，但点 0 与 1 除外．

我们还要证明

定理 8 上半平面中的每一点 τ，在同余子群 mod 2 之下，等价于 $\bar{\Omega}\cup\Omega'$ 中的恰好一点．

参看图 7–4．希望读者验证，域 Δ 用线性变换 $\tau, -1/\tau, \tau-1, 1/(1-\tau), (\tau-1)/\tau, \tau/(1-\tau)$ 映成图中阴影的区域，这些变换依次记为 $S_1, S_2, \cdots, S_6$．反变换 $S_k^{-1}(k=1, \cdots, 6)$ 的矩阵依次为

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}1&-1\\1&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&1\\-1&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}.$$

不难看出，每一个幺模矩阵恰好与其中之一同余 mod 2，在这个意义下，上述这些矩阵组成互不同余矩阵的一个完全集．对于变换 $S_k'(k=1, \cdots, 6)$，情况完全相同，这里 S_k' 把 Δ' 映成图中无阴影的域(把它们写出来的工作留给读者)．$\bar{\Delta}$ 与 $\bar{\Delta}'$ 的总共 12 个象一起覆盖集 $\bar{\Omega}\cup\bar{\Omega}'$ (闭包应当对于开的半平面取)．

设 τ 是上半平面中的任一点．集 $\bar{\Delta}\cup\bar{\Delta}'$ 可以认为与图 7–4 中的阴影区域的闭包一致．因此，根据定理 2，存在一个模变换 S，使得 $S\tau$ 位于 $\bar{\Delta}\cup\bar{\Delta}'$ 中．先设 $S\tau$ 是在 $\bar{\Delta}$ 中．我们知道 S 的矩阵与一个 S_k^{-1} 的矩阵同余 mod 2．由此可知，$T=S_kS$ 的矩阵与单位矩阵同余，换言之，T 属于同余子群．由于 $S\tau$ 位于 $\bar{\Delta}$ 中，故知 $T\tau=S_k(S\tau)$ 位于 $\bar{\Omega}\cup\bar{\Omega}'$ 中．若 $S\tau\in\bar{\Delta}'$，可用同样的推理．这样，

总有一个 $T\tau$ 在 $\bar{\Omega}\cup\bar{\Omega}'$ 中，显然它可以取在 $\bar{\Omega}\cup\Omega'$ 中.

唯一性不难从下列事实推出：S_k 以及 S_k' 是互不同余的. 细节留给读者.

习　题

证明函数

$$J(\tau)=\frac{4}{27}\frac{(1-\lambda+\lambda^2)^3}{\lambda^2(1-\lambda)^2}$$

关于整个模群是自守的. 它在什么地方取值 0 与 1, 重数为何？证明

$$J(\tau)=\frac{-4(e_1e_2+e_2e_3+e_3e_1)^3}{(e_1-e_2)^2(e_2-e_3)^2(e_3-e_1)^2}.$$

还要证明 $J(\tau)$将图 7-4 中的域 $\varDelta$ 映成一个半平面.

第8章　整体解析函数

1 解 析 延 拓

在前面几章中，我们曾经强调，所有函数都必须是确切定义了的，因而是单值的．至于象 $\log z$ 与 $\sqrt{z}$ 等函数，并不能用它们的解析表达式唯一地确定，因此要专门化一些力量，借以说明在适宜的场合，可以选定一个单值的分支．这一观点解决了逻辑上明确性的需要，但是它并没有论证对数或平方根的含义不明正是一个不能被忽视的本质特征．因此，对于强调而不是回避多值性的一种概念就显然是非常必要的了．

1.1 Weierstrass 理论

Riemann 偏爱于几何的观点，与此相反，Weierstrass 想从幂级数概念来建立解析函数的全部理论．对于 Weierstrass 来说，基础的积木块是一个幂级数

$$P(z-\zeta)=a_0+a_1(z-\zeta)+\cdots+a_n(z-\zeta)^n+\cdots$$

它有正的收敛半径 $r(P)$．这样一个级数由一个复数 ζ——称为幂级数的**中心**——与复系数序列 $\{a_n\}_0^\infty$ 确定．收敛半径由 Hadamard 公式给出：$r(P)^{-1}=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}|a_n|^{1/n}$．基本的要求是 $r(P)>0$，因为只有这时幂级数才定义圆盘 $D=\{z\,|\,|z-\zeta|<r(P)\}$ 中的一个解析函数 $f(z)$．

给定了一点 $\zeta_1\in D$，函数 $f(z)$ 在 ζ_1 附近有 Taylor 展开式 $P_1(z-\zeta_1)$．它在圆盘 D_1 中收敛，D_1 的半径 $r(P_1)$ 至少等于 $r(P_0)-|\zeta_1-\zeta|$，但可以更大．新的级数定义了 D_1 中的一个解析函数 $f_1(z)$，我们说，它是从 $f(z)$ 经**直接解析延拓**而得到的．f

与f_1一起定义了$D\cup D_1$中的一个解析函数，因为它们在交$D\cap D_1$中是相等的．如果D_1不包含于D中，则新函数是f向一个较大区域的延拓，而这正是构造的目的．

这一过程可以重复任意多次．在一般情形我们必须考虑一列幂级数$P_0(z-\zeta_0)$，$P_1(z-\zeta_1)$，…，$P_n(z-\zeta_n)$；每一个是前一个的直接解析延拓．换言之，如果P_k在圆盘D_k中收敛于函数f_k，则$\zeta_k\in D_{k-1}$，且$f_k=f_{k-1}\in D_{k-1}\cap D_k$．但不能推出$f_0$，…，$f_n$在$D_0\cup D_1\cup\cdots\cup D_n$中定义一个单值函数，因为如果$D_k$与一个$D_h$相交，其中$h$不等于$k-1$与$k+1$，但不能保证在$D_h\cap D_k$中$f_h=f_k$．正是这一可能性超出了严格意义下的函数概念，即在函数定义域的每一点处，函数只能有一个值．

只要象上面一样存在幂级数P_0，P_1，…，P_n，就称P_n是P_0的一个解析延拓．Weierstrass考察了可以用解析延拓从$P_0(z-\zeta_0)$得到的所有幂级数$P(z-\zeta)$．这一幂级数集称为Weierstrass意义下的一个解析函数．

一个幂级数是另一幂级数的一个解析延拓这性质显然是一种等价关系．在Weierstrass意义下的一个解析函数不是别的而是关于这一关系的一个等价类，在这类中初始幂级数P_0并不处于显著地位．根本的思想是：属于同一等价类的两个幂级数是同一函数的不同形式．

1.2 芽与层

Weierstrass的理论更多地具有历史意义，因为限制于幂级数以及它的收敛区域总是一种阻力而不是助力．不过，应该认识，Weierstrass的思想仍然是我们理解复解析函数论中多值性的基础．我们将扼要介绍一种更直接的方法，它与支配近代多复变函数论的一些高级思想更为一致．限于本书的篇幅，我们只能借用几个术语，用以简化某些证明．

定义于域Ω内的一个解析函数$f(z)$，构成一函数元素(function element)，记为(f,Ω)，若干函数元素按照彼此之间指定关

系组成的集合谓之整体解析函数.

两个函数元素(f_1, Ω_1)及(f_2, Ω_2)称为是互为直接解析延拓，如果$\Omega_1 \cap \Omega_2$非空，而在$\Omega_1 \cap \Omega_2$内$f_1(z)=f_2(z)$. 更明确点说，(f_2, Ω_2)称为(f_1, Ω_1)向域Ω_2的直接解析延拓. 向Ω_2的直接解析延拓不必一定存在，但如果有这样一个延拓，那必是唯一地确定的. 因为，如设(f_2, Ω_2)及(g_2, Ω_2)是(f_1, Ω_1)的两个直接解析延拓，则在$\Omega_1 \cap \Omega_2$内$f_2=g_2$，这将导致在整个Ω_2中$f_2=g_2$. 如$\Omega_2 \subset \Omega_1$，则$(f_1, \Omega_1)$的直接解析延拓是$(f_1, \Omega_2)$.

象在幂级数的情形中一样，我们考察链$(f_1, \Omega_1), (f_2, \Omega_2), \cdots, (f_n, \Omega_n)$，使得$(f_k, \Omega_k)$与$(f_{k+1}, \Omega_{k+1})$互为直接解析延拓，我们称$(f_n, \Omega_n)$是$(f_1, \Omega_1)$的一个解析延拓. 这就确定了一个等价关系，而把等价类叫做整体解析函数. 为便于印刷，我们把函数元素(f, Ω)所确定的整体解析函数用黑体字$\mathbf{f}$表示. 为使术语更灵活，我们也把(f, Ω)称为$\mathbf{f}$的一个分支(branch). 虽然(f, Ω)唯一确定$\mathbf{f}$，但反过来不真；在同一Ω上，$\mathbf{f}$可以有几个分支.

很明显，整体解析函数可以和 Weierstrass 意义下的解析函数等同起来，但在一般性方面几乎无所获益. 不过，有一个更富有成效的观点. 我们考虑(f, ζ)以代替(f, Ω)，这里ζ是一点而f在ζ是解析的，就是说，f在某个包含ζ的开集内有定义并且解析. 两对(f_1, ζ_1)与(f_2, ζ_2)等价，当且仅当$\zeta_1=\zeta_2$且在ζ_1的某一个邻域内$f_1=f_2$. 一个等价关系所应满足的各条件显然满足. 等价类称为芽(germ)，或更明确些，称为解析函数的芽. 每一芽确定一个唯一的ζ，称为芽的投影，我们用记号$\mathbf{f}_\zeta$表示具有投影ζ的一个芽. 一个函数元素(f, Ω)对每一$\zeta \in \Omega$产生一个芽$\mathbf{f}_\zeta$；反过来，每一个$\mathbf{f}_\zeta$由某个(f, Ω)确定.

读者当然会认识到：芽$\mathbf{f}_\zeta$可以与对应的收敛幂级数$P(z-\zeta)$等同起来，这就回到了我们的出发点. 但是，通过引进芽的概念，我们分离出收敛幂级数的一个基本的性质，即这样的事实：两个具同一中心的幂级数是全同的，当且仅当它们在中心的某一邻域中代表同一函数. 沿着这一想法，很清楚，我们完全可以考虑其它

函数类的芽,例如连续函数的芽,C^k 类函数的芽,等等. 而对于这些芽,与幂级数的等同就不再可能. 虽然我们主要感兴趣于解析函数的芽,但我们仍然要取一个稍更一般的观点.

设 D 是复平面中的一个开集. 具 $\zeta\in D$ 的所有芽 $\mathbf{f}_\zeta$ 的集合称为 D 上的一个层(sheaf),记为 $\mathfrak{S}$ 或 $\mathfrak{S}_D$. 如果我们处理的是解析函数的芽,则 $\mathfrak{S}_D$ 称为 D 上解析函数芽的层. 有一个投影映照 $\pi: \mathfrak{S}\to D$, 它把 $\mathbf{f}_\zeta$ 映为 ζ. 对于固定的 $\zeta\in D$, 原象 $\pi^{-1}(\zeta)$ 称为 ζ 上的茎(stalk); 记为 $\mathfrak{S}_\zeta$.

我们感兴趣于集 $\mathfrak{S}$ 是因为它有二重结构: 一个拓扑的, 一个代数的. 首先, 可以把 $\mathfrak{S}$ 做成一个拓扑空间, 它使我们有了连续映照. 第二,在每个茎上,有一个明显的代数结构, 因为 $\mathbf{f}_\zeta+\mathbf{g}_\zeta$ 或 $\mathbf{f}_\zeta\cdot\mathbf{g}_\zeta$ 的意义是清楚的. 为了简单起见,我们只注意加法结构,用这一结构的语言,每一个茎是一个 Abel 群.

现在可作一般的定义:

定义 1 D 上的一个层是一个拓扑空间 $\mathfrak{S}$ 和一个映照 $\pi: \mathfrak{S}\to D$, 具有下列性质:

(i) 映照 π 是一个局部同胚; 这是指: 每个 $s\in\mathfrak{S}$ 具有一个开邻域 Δ, 使得 $\pi(\Delta)$ 是开的, 而且 π 限制于 Δ 的约束是一个同胚映照.

(ii) 对每一个 $\zeta\in D$, 茎 $\pi^{-1}(\zeta)=\mathfrak{S}_\zeta$ 具有一个 Abel 群的结构.

(iii) 对于 $\mathfrak{S}$ 的拓扑, 群运算都是连续的.

实际上, D 可以是一个任意的拓扑空间, 但我们把 D 设想为复平面中的一个开集. 又, 一个 Abel 群的结构可以用别的代数结构代替.

现在我们来验证解析函数芽的层 $\mathfrak{S}$ 满足定义 1 中的条件. 为此,必须先在 $\mathfrak{S}$ 上引进一个拓扑. 把 $\mathfrak{S}$ 做成一个度量空间是不方便的, 也是没有必要的. 我们仅需指出 $\mathfrak{S}$ 的一些子集, 它们都是关于这个拓扑的开集. 我们对开集的标志是: 集 $V\subset\mathfrak{S}$ 是开的, 如果对于每个 $s_0\in V$, 存在一个函数元素 (f, Ω), 使得 (1) $\pi(s_0)=$

$\zeta_0\in\Omega$; (2) $(f,\ \Omega)$确定ζ_0处的芽s_0; (3) 由$(f,\ \Omega)$确定的芽$\mathbf{f}_\zeta$全体都在V中. 读者不难验证, 第3章定义8的条件都是满足的.

有了上面的s_0与$(f,\ \Omega)$, 设Δ是$(f,\ \Omega)$所确定的芽$\mathbf{f}_\zeta$全体所成的集. 根据我们对开集的定义, 显然Δ是s_0的一个开邻域, 而且映照π: $\Delta\rightarrow\Omega$是同胚的. 这样, 定义的条件(i)是满足的.

条件(ii)不需证明. 条件(iii)也是容易证明的, 但重要的是应理解其含义. 加法和减法只对同一茎上的芽有意义; 只要考察减法就够了. 考虑两个芽s_0、s_0', 有$\pi(s_0)=\pi(s_0')=\zeta_0$. 设它们是由函数元素$(f,\ \Omega)$和$(g,\ \Omega)$, $\zeta_0\in\Omega$所确定的. 为简单起见, 我们为两个函数元素取同一个Ω. 若$s\in\Delta_0$, $s'\in\Delta_0'$, $\pi(s)=\pi(s')=\zeta$, 则$s-s'$是由$(f-g,\ \Omega)$在ζ处确定的芽. 当ζ跑遍Ω时, $s-s'$跑遍s_0-s_0'的一个邻域; 此外, $\pi(s-s')=\pi(s)-\pi(s')$. 投影映照建立了Δ、Δ_0、Δ_0'与Ω之间的同胚. 因此很清楚, 我们可以收缩Δ_0与Δ_0', 使得Δ包含于s_0-s_0'的任一事先指定的邻域内, 从而证明了连续性.

1.3 截口与 Riemann 面

设$\mathfrak{S}$是D上的一个层, 考察一个开集$U\subset D$. 连续映照φ: $U\rightarrow\mathfrak{S}$称为D上的一个截口, 如果复合映照$\pi\circ\varphi$是U到自身的恒等映照. 从这一条件可知, $\varphi(\zeta_1)=\varphi(\zeta_2)$蕴涵着$\zeta_1=\zeta_2$; 因此$\varphi$是一对一的, 它的逆是$\pi$限制于$\varphi(U)$上的约束. 这样, 每一个截口是一个同胚映照.

每一点$s_0\in\mathfrak{S}$是在某个截口的象$\varphi(U_0)$之中; 我们只须取$U_0=\pi(\Delta)$, 其中Δ是(ii)中假设存在的邻域, 而φ等于π限制在Δ上的约束的逆.

在一个固定的U上的所有截口组成的集记为$\Gamma(U,\mathfrak{S})$. 如果非空, 则它具有一个 Abel 群的结构, 由于它, 把$\varphi-\psi$定义为具有值$\varphi(\zeta)-\psi(\zeta)$的截口成为有意义. 设$O_\zeta$是茎$\mathfrak{S}_\zeta$的零元素, 用$\omega(\zeta)=O_\zeta$定义函数$\omega$. 我们断言$\omega$是连续的, 因此是一个截口, 它称为零截口, 对于群$\Gamma(U,\ \mathfrak{S})$来说, 它的作用就是一个零

元素.

为证明连续性,考察一点$\zeta_0\in U$, 和一个$s_0\in\mathfrak{S}_{\zeta_0}$(例如, O_{ζ_0}). 根据我们前面的注释, s_0是在某个$\varphi(U_0)$中. 由条件(iii), $\varphi-\varphi=\omega$在U_0中连续. 由于ζ_0是任意的, 所以ω在全U上连续, 因此是一个截口. 我们已经证明零截口总是存在的,而且$\Gamma(U, \mathfrak{S})$非空。下面我们把零截口记为0.

如果U是连通的, 而且φ、$\psi\in\Gamma(U, \mathfrak{S})$, 则或者$\varphi$与$\psi$是全同的, 或者象$\varphi(U)$与$\psi(U)$是互不相交的. 事实上, $\varphi-\psi=0$与$\varphi-\psi\neq0$的集都是开的.

我们稍为详细地作了上述讨论是要说明假设是怎样作用的. 解析函数芽的层这个特殊情形是平凡的,这时$\Gamma(U, \mathfrak{S})$可解释为U上解析("单值")函数的加法群. 零截口非别,不过是常数0.

下面$\mathfrak{S}$总表示整个复平面上解析函数芽的层. $\mathfrak{S}$的分集看作一个拓扑空间,可与整体解析函数等同起来. 为看出这一点, 设$s_0\in\mathfrak{S}$是由函数元素(f_0, Ω_0)所确定的一个芽, 并设(f_1, Ω_1)是(f_0, Ω_0)的一个直接解析延拓; 注意, Ω_0与Ω_1都假设是连通的. 由于在$\Omega_0\cap\Omega_1$中$f_0=f_1$, 所以由这两个函数元素所确定的芽的集Δ_0与Δ_1相交; 作为Ω_0, Ω_1的同胚象, 集Δ_0、Δ_1都是连通的, 所以它们的并集$\Delta_0\cup\Delta_1$也是连通的. 由此可知,从(f_0, Ω_0)通过直接解析延拓的一个链所得到的函数元素全体产生了包含于s_0的分集$\mathfrak{S}_0$中的芽. 另一方面,令$\mathfrak{S}_0'$为$\mathfrak{S}_0$中的芽的集合, 它们可由(f_0, Ω_0)的一个解析延拓(f, Ω)确定. 易见$\mathfrak{S}_0'$及其在$\mathfrak{S}_0$中的余集都是开的. 因此$\mathfrak{S}_0'=\mathfrak{S}_0$, 从此得出结论: $\mathfrak{S}_0$精确地由属于一个整体解析函数的所有芽组成.

尽管有了这样的识别, 但更可取的是把$\mathfrak{S}_0$看作整体解析函数的定义域, 现在我们将整体解析函数记为$\mathbf{f}$, 它在$\mathbf{f}_\zeta$处的值正是与该芽相联系的幂级数的常数项. 按这一解释, $\mathfrak{S}_0$称为$\mathbf{f}$的 Riemann 面. 它与我们在第 3 章第 4.3 节中简略介绍的初等 Riemann 面确实十分相似,而且用于同一目的, 即可以使f单值. 我们可以把$\mathfrak{S}_0$画成铺开在平面上的层, 而叶——如果我们这样

称它们的话，那是截口的象．应当注意，我们尚未包括支点，它的作用将在后面研究．

为了更清楚起见，设整体解析函数 $\mathbf{f}$ 的 Riemann 面记为 $\mathfrak{S}_0(\mathbf{f})$. 给定了两个整体函数 $\mathbf{f}$ 与 $\mathbf{g}$，可能存在一个映照 θ: $\mathfrak{S}_0(\mathbf{f})=\mathfrak{S}_0(\mathbf{g})$，使得(1) $\pi\circ\theta=\pi$; (2) θ 是一个局部同胚． 在这些情况下，$\mathbf{g}\circ\theta$ 是 $\mathfrak{S}_0(f)$ 上的一个单值函数；通常，记法经简化而以 $\mathbf{g}$ 代替 $\mathbf{g}\circ\theta$. 这样，所有的导数 $\mathbf{f}'$, $\mathbf{f}''$, $\cdots$ 都定义在 $\mathbf{f}$ 的 Riemann 面上．所有整函数 $\mathbf{h}$ 都自动地定义在每一个 $\mathfrak{S}_0(\mathbf{f})$ 上，如果 $\mathbf{g}$, $\mathbf{h}$, $\cdots$，都定义在 $\mathfrak{S}_0(\mathbf{f})$ 上，那末每一个多项式 $G(\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{h}, \cdots)$ 也都定义在 $\mathfrak{S}_0(\mathbf{f})$ 上．

有一个经典的原理称为函数关系的承袭性 (permanence of functional relations). 假定某些函数元素 (f, Ω), (g, Ω), (h, Ω), $\cdots$ 每当 (f, Ω) 可以延拓（直接地或通过直接延拓的一个链）时都可以解析延拓．再设在 Ω 上 $G(f, g, h, \cdots)=0$. 则同一关系对所有解析延拓都成立，这一事实可表为 $G(\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{h}, \cdots)=0$. 特别，如果一个芽适合多项式微分方程 $G(z, f_1, f_1', \cdots, f^{(n)})=0$，则整体函数 $\mathbf{f}$ 适合同一方程．

1.4 沿弧的解析延拓

设 γ: $[a, b]\to\mathbf{C}$ 是复平面中的一段弧．考察一个整体解析函数 $\mathbf{f}$ 和它的 Riemann 面 $\mathfrak{S}_0(\mathbf{f})$，象前面一样，定义为解析函数的所有芽的层 $\mathfrak{S}$ 的一个分集．弧 $\bar{\gamma}$: $[a, b]\to\mathfrak{S}_0(\mathbf{f})$ 称为 $\mathbf{f}$ 沿弧 γ 的一个解析延拓，如果 $\pi\circ\bar{\gamma}=\gamma$，就是说，如果对所有 $t\in[a, b]$, $\bar{\gamma}(t)$ 投影到 $\gamma(t)$ 上．当然，按照弧的定义，$\bar{\gamma}(t)$ 关于 $\mathfrak{S}_0(\mathbf{f})$ 的拓扑来说，必然是 $[a, b]$ 上的连续函数．用另一种术语，也称 $\bar{\gamma}$ 是 γ 到 $\mathfrak{S}_0(\mathbf{f})$ 的提升(lifting).

沿弧的延拓所对应的直觉概念就是芽为连续地变化的．我们不能保证延拓一定存在，但下面重要的唯一性定理是正确的．

定理 1 一个整体解析函数 $\mathbf{f}$ 沿同一弧 γ 的两个解析延拓 $\bar{\gamma}_1$ 与 $\bar{\gamma}_2$ 或者恒等；或者对所有的 t, $\bar{\gamma}_1(t)\neq\bar{\gamma}_2(t)$.

证明是显而易见的．由于 π 是一个局部同胚，所以 $\bar{\gamma}_1-\bar{\gamma}_2$ 的象如果不包含在零截口中，就不可能包含零截口的一点．

根据这一定理，一个延拓就可用它的最初的值，即芽 $\bar{\gamma}(a)$ 唯一确定．最初的芽具有形式 $\mathbf{f}_{\zeta(a)}$，但 $\mathbf{f}$ 可有几个芽具有这一形式．最初的芽一经规定，我们就可以说从该芽出发的解析延拓，只要这样一个延拓本身是存在的．

这里很可能发生这样的情况，$\mathbf{f}$ 沿 γ 并无任何延拓，或者仅对某些初始芽，而不是对所有的芽存在一个延拓．现在我们来研究不能沿 γ 延拓的一个初始芽的情形．如果 $t_0>a$ 充分接近于 a，那末初始芽沿着 γ 对应于区间 $[a, t_0]$ 的子弧的延拓总应该存在；事实上，若 $\mathbf{f}_{\zeta(a)}$ 由函数元素 (f_0, Ω_0) 确定，只要子弧属于 Ω_0，情形就是如此．所有这种 t_0 的上确界是一个数 τ，满足条件 $a<\tau<b$，对于 $t_0<\tau$，延拓是可能的，而对于 $t_0\geqslant\tau$，延拓就不可能．在某种意义下，子弧 $\gamma[a, \tau]$ 会引导到使 $\mathbf{f}$ 不再有定义的一点．这一子弧就称为从给定初始芽引出的一条奇异路线；粗略地说，就是它引导到 $\gamma(\tau)$ 上的一个奇点．注意，当 t 从下趋于 τ 时，表示芽 $\bar{\gamma}(t)$ 的幂级数的收敛半径将趋于 0.

沿弧的延拓与用直接解析延拓的链所作的逐步延拓之间，其关系需要作进一步的解释．首先，设 $(f_1, \Omega_1), (f_2, \Omega_2), \cdots, (f_n, \Omega_n)$ 是直接解析延拓的一个链，我们常可用一段弧 γ 来连接两点 $\zeta_1\in\Omega_1$ 及 $\zeta_n\in\Omega_n$，使得 $\mathbf{f}$ 沿 γ 有一延拓 $\bar{\gamma}$，其初始芽为 (f_1, ζ_1)，最终芽为 (f_n, ζ_n)．为了证明这一点，我们只要令 γ 由下列部分组成即可，即：由点 ζ_1 至点 $\zeta_2\in\Omega_1\cap\Omega_2$ 的一段子弧 $\gamma_1\subset\Omega_1$，由 ζ_2 至 $\zeta_3\in\Omega_2\cap\Omega_3$ 的第二段子弧 $\gamma_2\subset\Omega_2$，等等，依此类推．在 γ_k 上令 $\bar{\gamma}(t)=(f_k, \zeta(t))$，则沿 γ 的延拓就可完全定义．

反之，如一延拓 $\bar{\gamma}$ 为已给，我们可以求得一条直接解析延拓的链，其构作方法与上面的弧 γ 相同．根据 Heine-Borel 引理，参数区间 $[a, b]$ 可细分为子区间 $[a, t_1], [t_1, t_2], \cdots, [t_{n-1}, b]$，使得在子区间 $[t_{k-1}, t_k]$ 内，对于适当选定的函数元素 (f_k, Ω_k)，有 $\bar{\gamma}(t)=(f_k, \gamma(t))$．虽然 (f_k, Ω_k) 与 (f_{k+1}, Ω_{k+1}) 不须互为直接解析延拓，

但它们至少都是其公共域限制到$\gamma(t_k)$的邻域的直接解析延拓.

为了说明沿弧的延拓的应用，我们将把对数函数定义为一个整体解析函数. 为此，我们来证明，在Ω中适合$e^{f(\zeta)}=\zeta$的所有函数元素(f, Ω)组成的集合是一个整体解析函数.

为此我们必须证明集合中的任两函数元素(f_1, Ω_1)，(f_2, Ω_2)可用一直接解析延拓的链来连接. 由于函数关系的承袭性，故知中间的函数元素都属于同一集. 选定点$\zeta_1\in\Omega_1$, $\zeta_2\in\Omega_2$, 并将它们用一段不通过原点的弧$\gamma(t)$, $t\in[\alpha, b]$连接起来. 由于ζ_1及ζ_2都不能等于零，故知这样做是完全可能的. 考察函数

$$\varphi(t)=f_1(\zeta_1)+\int_\alpha^t \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}dt.$$

根据微分法得知$\gamma(t)e^{-\varphi(t)}$是常数；对于$t=\alpha$, 其值为1, 因此$e^{\varphi(t)}=\gamma(t)$. 对于一个给定的t, 在圆盘$\Omega=\{\zeta \mid |\zeta-\gamma(t)|<|\gamma(t)|\}$中，存在$\log\zeta$的一个唯一确定的分支$f(\zeta)$，当$\zeta=\gamma(t)$时，其值为$\varphi(t)$. 显然$\bar{\gamma}(t)$就定义了沿$\gamma$的一个延拓. 最终的芽$\bar{\gamma}(b)$虽可不与$(\zeta_2, \Omega_2)$所确定的芽相合，但其在$\zeta_2$的值必与$f_2(\zeta_2)$相差$2\pi i$的一个倍数. 为了求得$\zeta_2$处的正确值，只须将最终芽$\bar{\gamma}(b)$沿一围绕原点若干次的闭曲线延拓即可. 最后，沿弧的延拓可用直接解析延拓的有限链来代替，这就证明了$\log\zeta$是一整体解析函数.

习 题

1. 如果一个函数元素可用一幂级数来定义，而这个幂级数的收敛半径假定为有限数. 求证至少有一条半径是对应的整体解析函数的一条奇异路线.（"一个幂级数在其收敛圆上至少有一奇点".）

2. 如果一个函数元素(f, Ω)只有一个直接解析延拓，那就是把f限制于一个比较小的域上而得到的延拓，除此之外，别无其它延拓，则称Ω的边界为f的一个自然边界. 试证明，级数$\sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$以单位圆为自然边界[提示：证明函数在幅角为$\pi$的有理数倍的每一条半径上趋于无穷大.]

3. 证明第7章第3.4节中引进的函数$\lambda(\tau)$以实轴为自然边界.

1.5 同伦曲线

现在我们应该从解析延拓理论的基本观点出发，研究一个域内的闭曲线的拓扑性质．我们所要讨论的问题就是一段弧在连续变形下的性态．从直觉观点来看，这是一个非常简单的概念．设 γ_1 及 γ_2 是域 Ω 内两段具有公共端点的弧，我们自然要问，当两端点固定不动，将 γ_1 始终限制在 Ω 内而移动时，它是不是能连续地变形成 γ_2．例如，在图 8-1 中，弧 γ_1 可以变形为 γ_2，但不能变形为 γ_3．两段弧，如果它们中的任一个可以变形为另一个，则称它们是关于 Ω 同伦的．显然，这是一种等价关系．

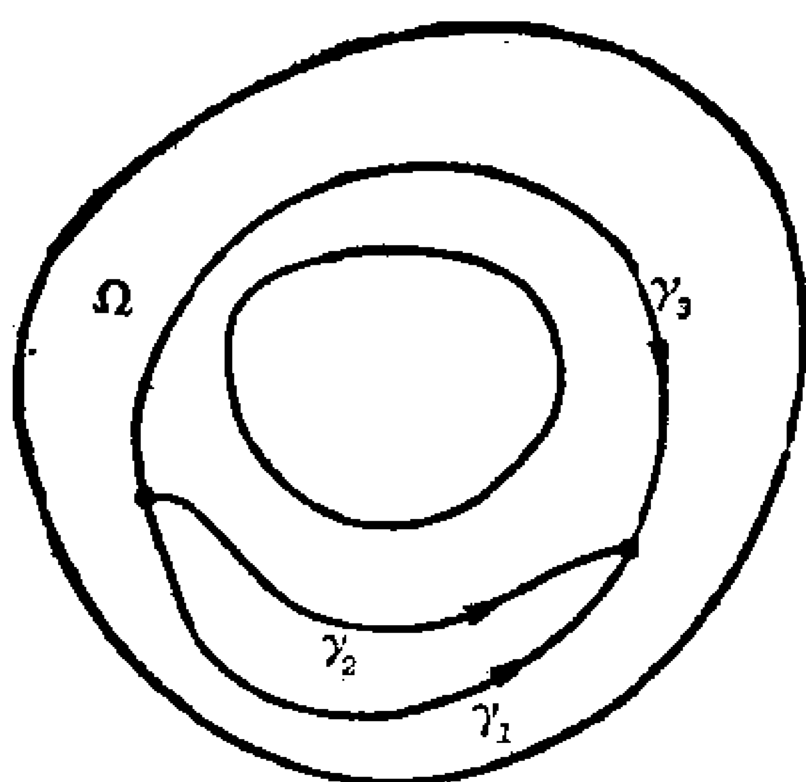


图 8-1　同伦弧

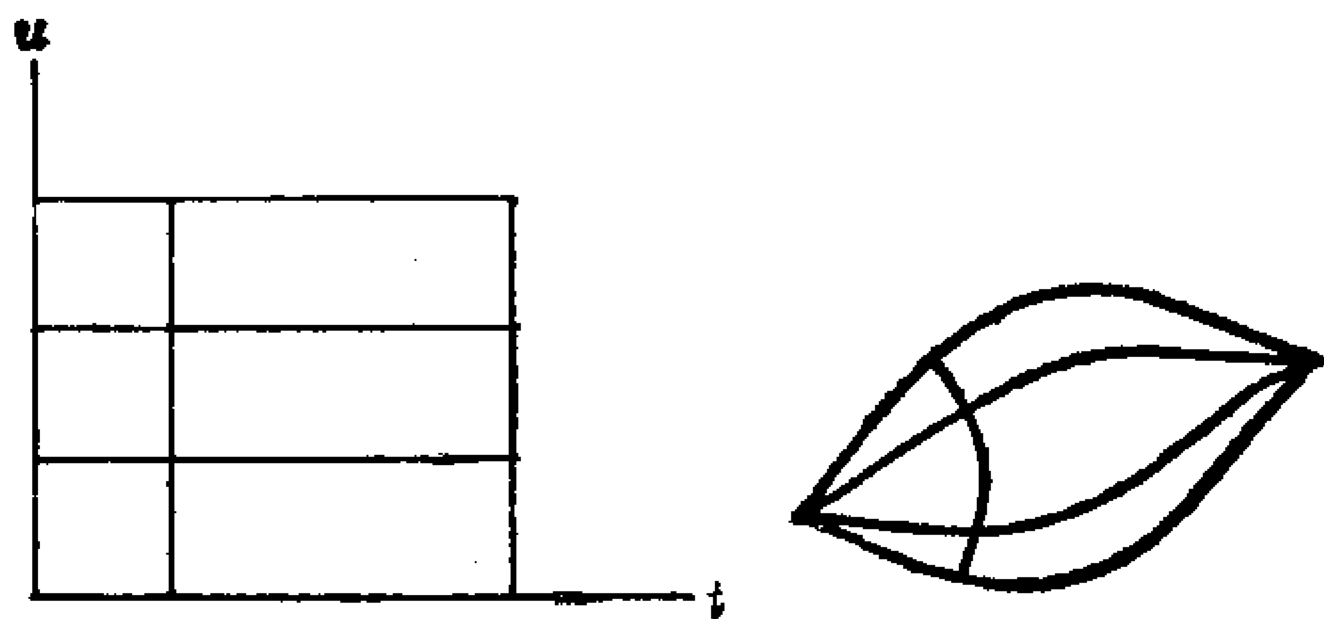


图 8-2　变形

现在我们来给同伦下一个精确的定义．物理上变形的概念可用数学术语来直接解释．显然可以想象，一段弧的变形可用两变数的连续函数 $\gamma(t, u)$ 来描述，此处点 (t, u) 取值于矩形 $[a, b]\times[0, 1]$（图 8-2）。对于每一个固定的值 $u=u_0$，对应着一段弧 $\gamma(t, u_0)$，变形的结果就是要把原来的弧 $\gamma(t, 0)$ 变为 $\gamma(t, 1)$．如果对于所有的 (t, u)，$\gamma(t, u)\in\Omega$，则变形就在 Ω 内进行，同时，如果 $\gamma(a, u)$ 及 $\gamma(b, u)$ 都是常数，则变形的弧的两端点固定不动．对于每一个固定的值 $t=t_0$，有一段弧 $\gamma(t_0, u)$，$u\in[0, 1]$ 与之对应，可称之为对应于 t_0 的点的变形路径

从此得到同伦的正式定义如下：

定义 2　在同一参数区间 $[a, b]$ 上的两段弧 γ_1 与 γ_2 称为在

Ω 内同伦，如果存在一个连续函数 $\gamma(t, u)$，定义在矩形 $[a, b]\times[0, 1]$ 上，具有下列性质：

1. 对于所有的 (t, u)，$\gamma[t, u]\in\Omega$.
2. 对于所有的 t，$\gamma(t, 0)=\gamma_1(t)$，$\gamma(t, 1)=\gamma_2(t)$.
3. 对于所有的 u，$\gamma(a,u)=\gamma_1(a)=\gamma_2(a)$，$\gamma(b,u)=\gamma_1(b)=\gamma_2(b)$.

上面我们把两弧 γ_1 与 γ_2 的参数区间规定为相同，其理由仅是为了方便．如果实际情形并不如此，则可用参数的线性变换把两区间变得一致，如果在新的参数表示下，两弧是同伦的，则原来的两弧也认为是同伦的．

通过简单的形式证明（读者当不难作出）可知上面定义的同伦关系是一种等价关系．因此，我们可以把所有的弧区分为等价类，称为同伦类；在同一同伦类中所有的弧都具有公共端点，而且可以在 Ω 内由一个变形到另一个．应当指出，同一弧的不同参数表示常是同伦的．事实上，为了 $\gamma_1(t)$ 和 $\gamma_2(t)$ 是同一弧的两种参数表示，必须而且只须存在一非降函数 $\tau(t)$，使得 $\gamma_2(t)=\gamma_1(\tau(t))$．函数

$$\gamma(t, u)=\gamma_1((1-u)t+u\tau(t))$$

所取的一切值都在所论的弧上，因此必在 Ω 内．对于 $u=0$ 及 $u=1$，分别可得到 $\gamma(t, 0)=\gamma_1(t)$ 及

$$\gamma(t, 1)=\gamma_1(\tau(t))=\gamma_2(t),$$

而两端点显然是固定不动的．

如果两弧 γ_1 及 γ_2 依次相接，以 γ_1 的终点作为 γ_2 的起点，则两弧组成一新的弧，我们把它记为 $\gamma_1\gamma_2$，以区别于同调论中所用的记法 $\gamma_1+\gamma_2$．$\gamma_1\gamma_2$ 的参数表示不是唯一的，但它对同伦类的确定并不重要．不仅如此，根据极为简单的理由即可以证明 $\gamma_1\gamma_2$ 的同伦类只依赖于 γ_1 及 γ_2 的同伦类．根据这一基本性质，我们可以把导致 $\gamma_1\gamma_2$ 同伦类的运算当作是同伦类的乘法．它只在 γ_2 的起点重合于 γ_1 的终点时有定义．如果我们所研究的只限于闭曲线的同伦类，起迄于一个定点 z_0，则乘积恒有定义，并可以同一族中的一条曲线来表示．而且，根据乘积的这一定义，可知过 z_0 的闭

曲线关于域 Ω 的同伦类组成一个群. 为了证明这一论断,必须先确立:

1. 结合律: $(\gamma_1\gamma_2)\gamma_3$ 同伦于 $\gamma_1(\gamma_2\gamma_3)$.

2. 存在一单位曲线 1, 使得 $\gamma 1$ 及 1γ 都同伦于 γ.

3. 存在一逆曲线 γ^{-1}, 使得 $\gamma\gamma^{-1}$ 及 $\gamma^{-1}\gamma$ 都同伦于 1.

结合律是非常显见的,因为 $(\gamma_1\gamma_2)\gamma_3$ 至多是 $\gamma_1(\gamma_2\gamma_3)$ 的一个再参数化. 作为单位曲线,可取常数 $z=z_0$; 实际上,记号 1 可表示任一能缩为一点 z_0 的闭曲线. 最后, 逆弧 γ^{-1} 是与曲线 γ 方向相反的弧. 如 γ 的表示式为 $z=\gamma(t)$, $a\leqslant t\leqslant b$, 则 γ^{-1} 的表示式可写成 $z=\gamma(2\beta-t)$, $b\leqslant t\leqslant 2b-a$, 因此 $\gamma\gamma^{-1}$ 的方程为

$$z=\gamma(t), \qquad a\leqslant t\leqslant b,$$
$$z=\gamma(2\beta-t), \qquad b\leqslant t\leqslant 2b-a.$$

曲线经下面的变形可缩为一点,即

$$\gamma(t,\ u)=\gamma(t), \qquad a\leqslant t\leqslant ua+(1-u)b,$$
$$\gamma(t,\ u)=\gamma(ua+(1-u)b), \quad ua+(1-u)b\leqslant t\leqslant u(b-a)+b,$$
$$\gamma(t,\ u)=\gamma(2b-t), \qquad u(b-a)+b\leqslant t\leqslant 2b-a.$$

这里,我们令转向点从 $\gamma(b)$ 退向 $\gamma(a)$. 由于对所有 $t\in[a,\ 2b-a]$, $\gamma(t,\ 1)=\gamma(a)=z_0$, 这就证明 $\gamma\gamma^{-1}$ 是同伦于 1 的. 在证明中, 我们并没有假设 γ 是一闭曲线; 因此,对于过 z_0 的所有弧 γ, $\gamma\gamma^{-1}$ 同伦于 1.

上面构作成功的群称为域 Ω 关于点 z_0 的同伦群或基本群. 作为一个抽象的群, 它不依赖于点 z_0. 事实上, 设 z_0' 为 Ω 中的另一点, 用整个位于 Ω 内的弧 c 连接 z_0 及 z_0'. 过 z_0 的每一闭曲线 γ', 对应着过 z_0 的一条闭曲线 $\gamma=c\gamma'c^{-1}$. 这一对应是保持同伦关系的, 因此可作为同伦类之间的一种对应关系. 而且积也是保持的, 因为 $(c\gamma_1'c^{-1})(c\gamma_2'c^{-1})$ 在消去 $c^{-1}c$ 之后, 与 $c(\gamma_1'\gamma_2')c^{-1}$ 同伦. 最后, 对应还是一对一的, 因如 γ 为已给, 则可选择 $\gamma'=c^{-1}\gamma c$, 并知对应曲线 $c\gamma'c^{-1}=(cc^{-1})\gamma(cc^{-1})$ 与 γ 同伦. 这就证明了关于 z_0 及关于 z_0' 的同伦群是同构的.

如果 γ_1, γ_2 是任两弧, 以 z_0 为起点并且具有一公共终点, 则

当且仅当 $\gamma_1\gamma_2^{-1}$ 同伦于1时，γ_1 同伦于 γ_2. 因为，如果 γ_1 同伦于 γ_2，则 $\gamma_1\gamma_2^{-1}$ 同伦于 $\gamma_2\gamma_2^{-1}$，因此与1同伦。反之，如 $\gamma_1\gamma_2^{-1}$ 同伦于1，只要 γ_1 与 γ_2 同伦，则

$$(\gamma_1\gamma_2^{-1})\gamma_2=\gamma_1(\gamma_2^{-1}\gamma_2)$$

同时同伦于 γ_1 及 γ_2. 本此理由，我们只要研究闭曲线的同伦就够了。

同伦群显然是拓扑不变的，据此同伦群的确定就可以得到简化. 事实上，将 Ω 映成 Ω' 的拓扑映照可将 Ω 中的任一变形映到 Ω' 上，这就确定了同伦类之间保持一一对应关系的一种乘法. 因此，拓扑等价的域具有同构的同伦群。

一圆盘的同伦群退化为单位元素；这就是说，具有公共端点的任两弧是同伦的. 其证明要用到圆盘的凸性：弧 $z=\gamma_1(t)$ 经如下的变形可变成弧 $z=\gamma_2(t)$，

$$\gamma(t,\ u)=(1-u)\gamma_1(t)+u\gamma_2(t),$$

变形路径都是线段. 对于任何凸域，同样的证法也有效. 特别是，整个平面也有一同伦群，它退化为单位元素.

在第6章第1节中我们曾经证明：不是整个平面的任一单连通域可以共形地映成一个圆盘. 在这里，共形性是不重要的，但映照是拓扑的这一事实表明任一单连通域具有一基本群，这个基本群就是单位元素. 我们将可看到，反过来也是正确的.

1.6 单值性定理

令 Ω 为复平面中一个固定的域. 现在来考察一个整体解析函数 $\mathbf{f}$，它可以沿着 Ω 内的所有弧 γ，从定义于 γ 起点 ζ_0 的任一芽开始进行延拓. 更精确地说，对于 $\mathbf{f}$ 的任一函数元素 $(f_0,\ \Omega_0)$，$\zeta_0\in\Omega_0$，存在沿 γ 的一延拓 $\bar{\gamma}$，它的起始芽由 $(f_0,\ \zeta_0)$ 定义.

如果已给定两具有公共端点的弧 γ_1, γ_2，我们所要明确的是：在沿着 γ_1 及 γ_2 延拓时，一公共的起始芽是不是可以归于同一终端芽. 这方面的一个基础定理称为单值性定理，如下：

定理 2 设弧 γ_1 与 γ_2 关于 Ω 同伦，并设 $\mathbf{f}$ 的一个起始芽可

以沿着 Ω 内的所有弧延拓，则这一起始芽沿着弧 γ_1 及 γ_2 的延拓必终于同一点。

首先应当注意，沿着一段形如 $\gamma\gamma^{-1}$ 的弧的延拓必然会回到原来的起始芽．同样，沿着一段形如 $\sigma_1(\gamma\gamma^{-1})\sigma_2$ 的弧的延拓与沿着 $\sigma_1\sigma_2$ 的延拓具有同样效果．因此，我们说沿着弧 γ_1 及 γ_2 的延拓导向同一终端就等于说沿着 $\gamma_1\gamma_2^{-1}$ 的仍延拓回到起始芽．

根据定理的假设，存在 γ_1 变到 γ_2 的一个变形 $\gamma(t,u)$．$\gamma(t,u)$ 把变形矩形 $R=[a, b]\times[0, 1]$ 内的每一弧 σ 变到弧 $\sigma'\in\Omega$，如果 σ' 以 γ_1 及 γ_2 的起点为起点，则所给的起始芽沿着 σ' 必有一唯一的延拓．为了简单起见，我们把它称为沿着 σ 的延拓．定理断定，沿着 R 的周界 Γ 的延拓将回到起始芽．Γ 的方向是无关重要的，但一经固定之后，对于所有的情形均以此固定的为准．

这一定理的一个简单证明可以平分法为根据．先将 R 横向对分为二，R_1 及 R_2，将下半个矩形 R_1 的周界记为 π_1，以左下角 0 为起点，其方向是这样取定的，即在与大矩形公共的边上，与 Γ 的方向一致．对于上半矩形 R_2，作折线 π_2，起始于 0，垂直向上引至 R_2 的左下角，并以与 Γ 一致的方向(在公共边上)绕过 R_2 的周界而垂直向下回到 0(图 8-3)．这样，曲线 $\pi_1\pi_2$ 与 Γ 相差的只是一段形如 $\sigma\sigma^{-1}$ 的中间弧．因此，沿 $\pi_1\pi_2$ 的延拓就与沿 Γ 的延拓一致．所以，如果沿 π_1 及 π_2 都能回到起始芽，则沿 Γ 也必能回到起始芽．现在作相反假设：沿 Γ 不能导致回到起始芽，则 π_1 或者 π_2 亦必具有同样性质．再将对应矩形纵向对分为二，并应用同样的理由，如此重复下去，可得一列矩形 $R\supset R^{(1)}\supset R^{(2)}\supset\cdots\supset R^{(n)}\supset\cdots$

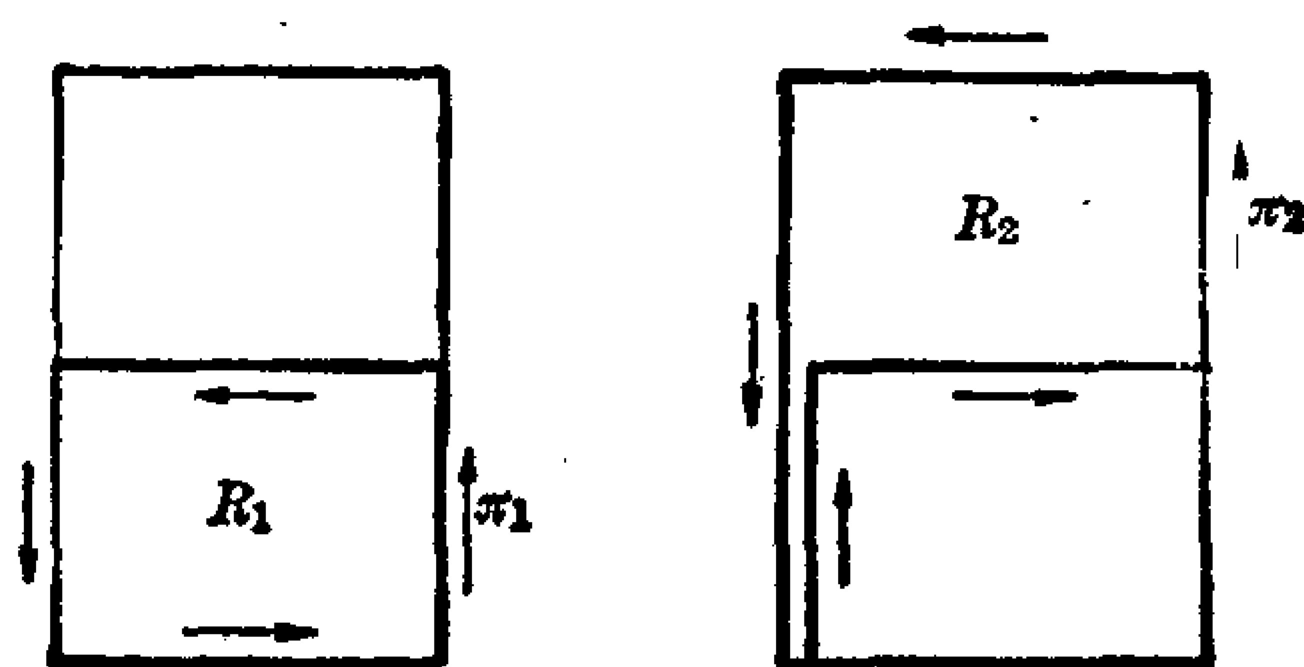


图 8-3　单值性定理

及对应的闭曲线 $\pi^{(n)}$，使得起始芽沿着 $\pi^{(n)}$ 的延拓不回到同一芽．每一个 $\pi^{(n)}$ 都有形式 $\sigma_n\Gamma_n\sigma_n^{-1}$，此处 σ_n 是一个完全确定的多边形，以 0 为起点，以 $R^{(n)}$ 的左下角为终点，Γ_n 为 $R^{(n)}$ 的周界；同时，σ_n 是 σ_{n+1} 的子弧．

当 $n\to\infty$ 时，矩形 $R^{(n)}$ 收敛为一点 P_∞，而多边形 σ_n 在极限情形形成一终于 P_∞ 的弧 σ_∞．起始芽沿着 σ_∞ 必有一延拓，这一延拓以 P_∞ 在映照 $\gamma(t, u)$ 下的象 ζ_∞ 上的函数元素 $(f_\infty, \Omega_\infty)$ 所确定的芽为终点．对于足够大的 n，Γ_n 的象将包含在 Ω_∞ 内，而在 σ_n 的终点上所得的芽必属于函数元素 $(f_\infty, \Omega_\infty)$．在这种情形下，应用元素 $(f_\infty, \Omega_\infty)$ 即可构作一个沿着 $\pi^{(n)}$ 的延拓，它能引回到起始芽．但这与定义 $\pi^{(n)}$ 的性质矛盾，这就证明了沿着 Γ 的延拓必能回到起始芽．

单值性定理最重要的意义在于它说明了，凡是可沿着单连通域内所有弧延拓的任一整体解析函数，对于每一个起始分支确定出一个单值解析函数．也就是说，单连通域的 Riemann 面（没有支点）必只由一叶组成．

上述结论可进一步引申为：一个域，如果它的同伦群退化为单位元素，则必是单连通的．因为如果 Ω 是多连通的，则 Ω 的余集必存在一有界分集 E_0，而如 $z_0\in E_0$，则 $\log(z-z_0)$ 在 Ω 内不能为单值．由单值性定理可知，Ω 的同伦群不能退化为单位元素．

这是我们证明单连通域相互等价的三种特征性质的最后一步．这三种特征性质是：(1) Ω 是单连通的，如果其余集是连通的；(2) Ω 是单连通的，如果它与一圆盘同胚；(3) Ω 是单连通的，如果它的基本群退化为单位元素．

1.7 支点

为了详细研究多值函数的奇性，必须先确定有孔圆盘的基本群．令有孔圆盘为 $0<|z|<\rho$，并考察一固定的点，例如正的半径上的点 $z_0=r<\rho$．用

$$\gamma(t, u)=(1-u)\gamma(t)+ur\frac{\gamma(t)}{|\gamma(t)|}$$

作中心投影，则任一过 z_0 的闭曲线 γ 可变形为圆周 $|z|=r$ 上的一曲线．因此，我们只须讨论这一圆的圆周上的曲线就够了．我们仍旧用记号 $\gamma(t)$．

根据连续性，每一 t_0 必具有一邻域，在这一邻域中，可使 $|\gamma(t)-\gamma(t_0)|<r$；而且 $\gamma(t)$ 不能同时取值 r 及 $-r$．应用 Heine-Borel 引理或平分法容易看出，我们可写 $\gamma=\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_n$，此处每一 γ_k 或者是不通过 r，或者是不通过 $-r$．为了简单起见，将点 r 及 $-r$ 用 P_0 及 P'_0 表示(图 8-4)，并把 γ_k 的两端点记为 P_k 及 P_{k+1}．由于 γ_k 包含在一个去掉正半径或者去掉负半径而成的单连通域内，因此它可变形成两弧 P_kP_{k+1} 之一．结果，γ 可变形成若干单弧的乘积．这些单弧的相接端点为 $P_0P_1P_2\cdots P_nP_0$．这一路径又可易为 $P_0P_1P_2P_0P_2P_3P_0\cdots P_0P_{n-1}P_nP_0$，此处我们规定 P_kP_0 及 P_0P_k 是不包含 P'_0 的弧．事实上，引进与 1 同伦的往复的弧 $P_kP_0P_k$ 即可得到新的路径．

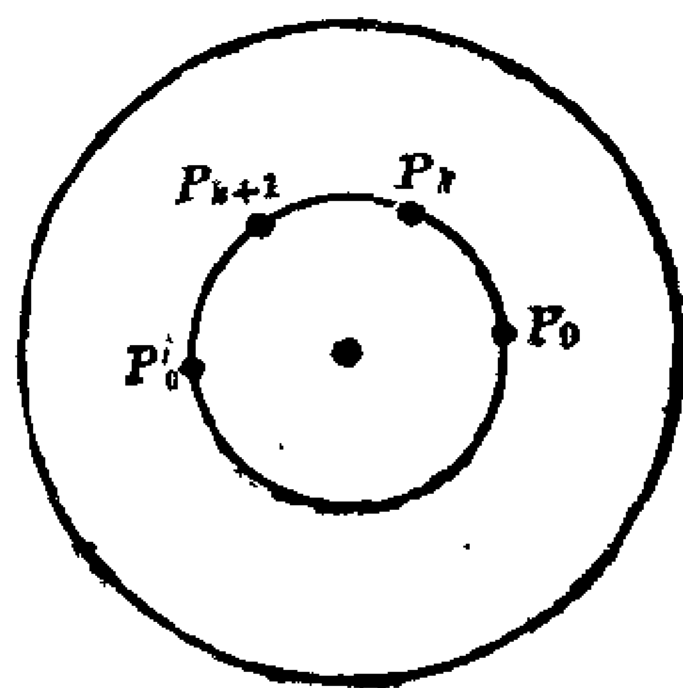


图 8-4

我们证明了每一 γ 与形如 $P_0P_kP_{k+1}P_0$ 的闭曲线之积同伦．如果 P_kP_{k+1} 不包含 P'_0，则这一曲线与 1 同伦．反之，如 P_kP_{k+1} 包含 P'_0，则枚举所有可能情形就可看出，曲线必与 C 或 C^{-1} 同伦，此处 C 是整个圆．因此，每一闭曲线必与 C 的幂同伦．

最后，要注意 C^m 仅当 $m=0$ 时与 1 同伦．这是因为

$$\int_{C^m}\frac{dz}{z}=m\cdot 2\pi i,$$

如曲线与 1 同伦，则积分必等于零．从此可知：有孔圆盘的基本群与整数的加法群同构．显然，一个任意的环具有同样的基本群．

现在来考察一个可沿有孔圆盘 $0<|z|<\rho$ 中所有的弧延拓的整体解析函数 $\mathbf{f}$．选定 $z_0=r$ 处的一个芽作为起始芽，并将它沿曲线 C^m 延拓．这一延拓或者是不回到起始芽，或者是存在一最小正整数 h，使得 C^h 能导致回到起始芽．在后一情形下，令 $m=$

$nh+q$, n 为整数而 $0\leqslant q<h$. 如 C^m 能导致回至起始芽, 则 C^q 亦必如此. 但由 m 的选取可知这仅在 $q=0$ 时可能. 这样, 要 C^m 能导致回到起始芽, 必须 m 是 h 的一个倍数.

考察将 $0<|\zeta|<\rho^{1/h}$ 映成 $0<|z|<\rho$ 的映照 $z=\zeta^h$. 可以断言 $\mathbf{f}$ 在下述意义下可表为一个单值解析函数 $F(\zeta)$: 对于每一个 ζ_1, $0<|\zeta_1|<\rho^{1/h}$, 存在一函数元素 $(f, \Omega)\in\mathbf{f}$, $\zeta_1^h\in\Omega$, 使得在 ζ_1 的一个邻域内有 $F(\zeta)=f(\zeta^h)$; 特别是, 对应于点 $\zeta_0=r^{1/h}$ 的函数元素应能确定 z_0 处的起始芽.

为了构作 $F(\zeta)$, 我们用弧 γ' 连 ζ_0 与 ζ, 用映照 $z=\zeta^h$ 求 γ' 的象, 而后沿着 γ' 的象延拓 $\mathbf{f}$ 的起始芽; 我们把 $F(\zeta)$ 定义为这一延拓后所得的最终芽的值. 必须证明 $F(\zeta)$ 是唯一地确定的. 为此, 设 ζ_1' 及 ζ_2' 为由 ζ_0 至 ζ 的两条路径, 则 $\zeta_1'\zeta_2'^{-1}$ 可变形为过 ζ_0 的一个圆 C' 的幂 C'^n. 因此, 象曲线 $\zeta_1\zeta_2^{-1}$ 可变形为 C'^n 的象 C^{nh}. 但 C^{nh} 导致回到起始芽, 因此 ζ_1 及 ζ_2 所确定的是同一值 $F(\zeta)$. 最后, 如 ζ 位于 ζ_1 的一个邻域内, 则可先作一由 ζ_0 至 ζ_1 的弧 ζ_1', 再作一由 ζ_1 至 ζ 的变弧 γ', 保持在邻域之内. 如邻域足够小, 则沿着 γ' 的象的延拓可由一个函数元素 (f, Ω) 来确定, 因此在该邻域内 $F(\zeta)=f(\zeta^h)$.

由于 $F(\zeta)$ 在原点的有孔邻域内是单值和解析的, 故它必具有一收敛的 Laurent 展开, 形如

$$F(\zeta)=\sum_{-\infty}^{\infty}A_n\zeta^n. \tag{1}$$

应当注意, 这一展开式依赖于起始芽的选择; 不同的起始芽可导致完全不同的展开式, 特别是, 可导致 h 个不同的值. 实际上, 即使是级数(1), 也产生 h 个不同的展开式, 对应于 $z^{1/h}$ 的 h 个初始值. 如令 $\omega=e^{2\pi i/h}$, 则这些展开式可表示为

$$f_\nu(z)=\sum_{-\infty}^{\infty}A_n\omega^{\nu n}z^{n/h}\quad(\nu=0, 1, \cdots, h-1). \tag{2}$$

如将芽 (f_ν, z_0) 沿 C 延拓, 则可引至 $(f_{\nu+1}, z_0)$, 这里应当理解下标为 h 的恒等于 0.

在特殊情形下, Laurent 展开可只包含有限个负数次乘方的

项．这时，$F(\zeta)$ 或者具有一可去奇点，或者具有一极点，只要 $h>1$，则多值函数 $f(z)$［或更正确地说，将给定起始分支在有孔圆盘内部延拓而成的整体解析函数］称为在 $z=0$ 处具有一代数奇点或支点．如 $F(\zeta)$ 具有一可去奇点，则支点是一寻常代数奇点，反之则为一代数极点．在任一情形下，当 z 沿一任意弧趋于 0 时，$f(z)$ 趋于一确定的极限 A_0 或 ∞．

显然，我们也可以研究在一任意点 a 或 ∞ 处有一孤立奇点，而有孔圆盘的半径可任意小的情形．如 h 为有限，则 $w=f(z)$ 与自变数 z 之间的对应关系可用如下形式的等式来表达：

$$w=\sum_{-\infty}^{\infty} A_n\zeta^n,$$

$$z=a+\zeta^h \quad 或 \quad z=\zeta^{-h},$$

变数 ζ 称为局部单值化变数．

在代数奇点的情形，对于 Riemann 面，需要把一个具有投影 a 的支点也放在曲面上，使曲面得以完备．支点本身不是 $\mathbf{f}$ 的一个芽，但它由类似于(2)的一个分指数幂级数展式集合

$$f_\nu(z)=\sum_{\nu=\nu_0}^{\infty} A_n w^{\nu n}(z-a)^{n/h} \tag{3}$$

完全确定；对于在 ∞ 处的一个奇点，$z-a$ 必须换为 $1/z$．支点的各邻域应包括支点本身，以及对某个 $\delta>0$，适合 $|\zeta-a|<\delta$ 的所有芽(f_ν, ζ)，这些芽是在(3)中代入 $(z-a)^{1/h}$ 的一个定义在 ζ 的邻域中的单值分支而得到的．所得的拓扑空间将是一个曲面，其意义是：每一个点，包括诸支点，具有一个同胚于圆盘的邻域．

在 Weierstrass 理论中，习惯上要考虑所有幂级数展开式的全体，包括分指数的幂级数展开式，而这些幂级数都可从一个单独的幂级数经过解析延拓得到．并把这叫做一个解析构形 (analytic configuration, analytisches Gebilde)．

2 代数函数

形如 $P(w, z)=0$ 的方程对于每一 z 有有穷个解 $w_1(z)$, …,

$w_m(z)$，此处 P 为一个二变数的多项式．我们要证明，这些根可以解释为一个整体解析函数 $\mathbf{f}(z)$ 的各个值，因此称函数 $\mathbf{f}(z)$ 为代数函数．反之，如给定了一个整体解析函数，我们就是要明确它是不是满足一多项式方程．

2.1 两多项式的结式

如果一个二变数的多项式 $P(w, z)$ 不能表为两个不等于常数的多项式之积，则称这一多项式是不可约的．两多项式 P 及 Q，如果它们除了常数之外没有公因子，则称这两多项式互质．

下面一个定理按其性质是属于代数的．但对代数函数的理论来说，它有着非常重要的意义，所以我们在这里仍给以证明．

定理 3 设 $P(w, z)$ 及 $Q(w, z)$ 是两个互质的多项式，则只有有穷个 z_0 的值可使方程 $P(w, z_0)=0$ 及 $Q(w, z_0)=0$ 具有一公共根．

设 P 及 Q 均按 w 的降幂排列，并令 $Q(w, z)=b_0(z)w^m+\cdots+b_m(z)$，此处 $b_0(z)$ 不恒等于零．如以 Q 除 P，则得一商及一余数，它们都是 w 的多项式，并且是 z 的有理函数．我们建立 Euclid 辗转相除法如下：

$$
\begin{aligned}
c_0P &= q_0Q+R_1,\\
c_1Q &= q_1R_1+R_2,\\
c_2R_1 &= q_2R_2+R_3,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
c_{n-1}R_{n-2} &= q_{n-1}R_{n-1}+R_n,
\end{aligned}
\tag{4}
$$

此处 q_k 及 R_k 都是 w，z 的多项式，而 c_k 是 z 的多项式，用以消除分式．R_k 的 w 的次数是递降的，而 R_n 则是 z 一数的多项式．如 $R_n(z)$ 恒等于零，则根据因子分解的唯一性定理，从(4)中的最后一式可知，R_{n-2} 将能被 R_{n-1} 的任一不可约因子所除尽，此处 R_{n-1} 是 w 的正幂多项式．根据同样理由，逐步推论下去，可知所有的 R_k 以及 Q 与 P 都将被同一因子除尽．这是与假设矛盾的，因为 R_{n-1} 是 w 的正幂多项式，因此必具有一包含 w 的不可约因子．

现在设 $P(w_0, z_0)=0$ 及 $Q(w_0, z_0)=0$. 将这些值代入 (4), 得 $R_1(w_0, z_0)=0, \cdots, R_{n-1}(w_0, z_0)=0$, 最后 $R_n(z_0)=0$. 但因 R_n 不恒等于零, 故知只有有穷个 z_0 可满足这一条件, 从而定理得证.

多项式 $R_n(z)$ 称为 P 及 Q 的结式. 更确切地说, 如要结式能唯一地确定, 则必须(4)中的指数 c_k 都是最小可能的. 实际上, 定理 3 中所说的结式对我们来说并不太重要. 这一定理将应用于不可约多项式 $P(w, z)$ 及其关于 w 的偏导数 $P_w(w, z)$. 只要 P 关于 w 的次数是正的, 则两个多项式是互质的, 我们把 P 与 P_w 的结式称为 P 的判别式. 对于判别式的零点 z_0, 方程 $P(w, z_0)=0$ 具有重根.

最后, 应当注意, 任两互质的多项式 P 及 Q 的结式 $R(z)$ 可写成 $R=pP+qQ$ 的形式, 此处 p, q 都是多项式. 这可直接从(4)式推得.

2.2 代数函数的定义与性质

我们现在先列一精确的定义.

定义 3 如果一个整体解析函数 $\mathbf{f}$ 的所有函数元素(f, Ω)在 Ω 内满足关系 $P(f(z), z)=0$, 此处 $P(w, z)$ 为一不恒等于零的多项式, 则称 $\mathbf{f}$ 为一代数函数.

根据函数关系的承袭性, 我们只要假定有一个函数元素满足方程 $P(f(z), z)=0$ 即可. 因为其他的函数元素将自动满足同一关系. 我们还可以假设 $P(w, z)$ 是一不可约多项式. 设 $P(w, z)$ 有因子分解 $P=P_1P_2\cdots P_n$, 其中因子 P_k 均为不可约. 对于任一固定的点 $z\in\Omega$, 等式 $P_k(f(z), z)=0$ 之中必有一个成立. 考察一个由互不相同的点 $z_n\in\Omega$ 组成的序列, 如果它在 Ω 内趋于一极限, 则必有一等式 $P_k(f(z_n), z_n)=0$ 对无穷个 z_n 成立. 由此可知, $P_k(f(z), z)=0$ 这一特殊关系在 Ω 内恒能满足, 因此必为 f 的所有函数元素所满足. 据此, 我们可随意地以 P_k 代 P.

此外, 还不难看出, 一代数函数所确定的不可约多项式 P, 除

了一常数因子外，是唯一的．因为如果设 Q 是一本质上不同的不可约多项式，则可确定结式 $R(z)=pP+qQ$．如对所有的 $z\in\Omega$，有 $P(f(z),z)=0$ 及 $Q(f(z),z)=0$，则在 Ω 内将有 $R(z)=0$，但这与 $R(z)$ 不能恒等于零矛盾．注意，P 不能退化成仅为 w 一数的多项式．如它只包含有 w，则必具有 $w-a$ 的形式，于是函数 $\mathbf{f}$ 就化为常数 a．

其次，我们来证明：对应于 w 的正幂的任一不可约多项式 $P(w,z)$，存在一代数函数．设

$$P(w,z)=a_0(z)w^n+a_1(z)w^{n-1}+\cdots+a_n(z).$$

设 z_0 既不是多项式 $a_0(z)$ 的一个零点，又不是 P 的判别式的一个零点，则方程

$$P(w,z_0)=0$$

恰有 n 个不同根 $w_1, w_2, \cdots, w_n$．在这种情形下有下面引理成立：

引理1 存在一个包含 z_0 的开圆盘 Δ 及 n 个函数元素 (f_1,Δ)，(f_2,Δ)，$\cdots$，(f_n,Δ)，具有下列性质：

(a) 在 Δ 内，$P(f_i(z),z)=0$；

(b) $f_i(z_0)=w_i$；

(c) 如 $P(w,z)=0$，$z\in\Delta$，则对于某一 i，$w=f_i(z)$ 成立．

多项式 $P(w,z_0)$ 在 $w=w_i$ 处具有单零点．确定一个 $\varepsilon>0$，使各个圆盘 $|w-w_i|\leqslant\varepsilon$ 不互相交迭，并以 C_i 表示圆 $|w-w_i|=\varepsilon$．则在 C_i 上，$P(w,z_0)\neq 0$，而根据幅角原理，有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_i}\frac{P_w(w,z_0)}{P(w,z_0)}\,dw=1.$$

如以 z 代 z_0，则积分都变成在 z_0 邻域内确切定义了的 z 的连续函数．由于它们只能取整数值，因此必存在一邻域 Δ，使得对于所有的 $z\in\Delta$，

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_i}\frac{P_w(w,z)}{P(w,z)}\,dw=1.$$

这就是说方程 $P(w,z)=0$ 在圆盘 $|w-w_i|<\varepsilon$ 内恰有一个根；将这一根记为 $f_i(z)$，根据留数计算法，其值为

$$f_i(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_i} w\,\frac{P_w(w,\ z)}{P(w,\ z)}\,dw.$$

这一式表明 $f_i(z)$ 是解析的. 此外, $f_i(z_0)=w_i$, 而且由于方程 $P(w,\ z)=0$ 恰具有 n 个根, 因此得(c).

由引理 1 立即可知, 对应于多项式 P, 存在一个代数函数 $\mathbf{f}$; 事实上, 我们可取 $\mathbf{f}$ 为函数元素 $(f_1,\ \Delta)$ 所确定的整体解析函数, 其中任一 Δ 的心 z_0 都不与应排除的有穷个点中的任一个重合. 此外, 我们还将证明所有这种函数元素属于同一整体解析函数; 这也就证明了对应于 P 的函数 $\mathbf{f}$ 是唯一的. 为此, 首先设 $(f,\ \Omega)$ 是一个这样的函数元素. 则必存在一 $z_0\in\Omega$, 它不与任一应排除的点重合; 对于这一 z_0, 确定一对应的 Δ. 对于 $z\in\Omega$, 由于 $P(f(z),\ z)=0$, 由(c)可知, 在 $\Delta\cap\Omega$ 的每一点上 $f(z)$ 必等于某一 $f_i(z)$. 但这样一来, $f(z)$ 将在 z_0 的任一邻域的无穷多个点上等于同一 $f_i(z)$, 因此 $(f,\ \Omega)$ 必属于 $(f_i,\ \Delta)$ 所确定的整体解析函数.

令排除的点为 $c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_m$. 现在来证明, 凡满足方程 $P(f(z),\ z)=0$ 的函数元素 $(f,\ \Omega)$ 可沿着任一不过点 c_k 的弧延拓. 因为如果不如此, 则将存在一弧 $\gamma[a,\ b]$, 使得一给定的起始芽可沿所有的子弧 $\gamma[a,\ \tau]$, $\tau<b$ 而不是沿整个弧延拓. 置 $z_0=\gamma(b)$, 根据引理 1 确定一 Δ, 并选定 τ, 使当 $t\in[\tau,\ b]$ 时, $\gamma(t)\in\Delta$. 应用上面的同样理由可证, 沿着 $\gamma[a,\ \tau]$ 延拓而得的芽 $\overline{\gamma}(\tau)$ 必由函数元素 $(f_i,\ \Delta)$ 之一所确定. 但这样一来, 它必可沿着所有引至 b 的路径延拓, 从而得出矛盾.

但迄今为止, 我们还没有证明所有的元素 $(f_i,\ \Delta)$ 属于同一整体解析函数. 要作这一部分的证明, 必须先详细研究一下临界点 c_k 上的性态.

2.3 临界点上的性态

上面讨论中一直被排除的点 c_k 是 P 的首项系数 $a_0(z)$ 的零点及判别式的零点. 选定 δ, 使圆盘 $|z-c_k|<\delta$ 不包含 c_k 以外的其他临界点. 在这一圆盘中, 固定一点 $z_0\neq c_k$, 并在这一点选定一芽

(f_i, z_0). 这一芽可沿着有孔圆盘中所有的弧延拓. 此外, 如果这一芽沿着过 z_0 而以 c_k 为圆心的圆 C 延拓, 则最后必回到芽 (f_i, z_0). 由于这种分支的数目只能是有限的, 故知, 必存在一最小正整数 $h \leqslant n$, 能使沿着 C^h 的延拓回到起始芽 (f_i, z_0). 根据 1.6 节的基本结果, 有

$$f_i(z)=\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} A_\nu (z-c_k)^{\nu/h}. \tag{5}$$

先设 c_k 不是 $a_0(z)$ 的一个零点. 则当 $z \to c_k$ 时, $f_i(z)$ 将保持有界. 实际上, 只要 $f_i(z) \neq 0$, 方程 $P(f_i(z), z)=0$ 可写成如下形式:

$$a_0(z)+a_1(z) f_i(z)^{-1}+\cdots+a_n(z) f_i(z)^{-n}=0. \tag{6}$$

如果 $f_i(z)$ 无界, 则将存在点列 $z_n \to c_k$ 而 $f_i(z_n) \to \infty$. 代入(6)将得 $a_0(z_n) \to 0$, 这与 $a_0(c_k) \neq 0$ 的假设矛盾. 由此可知展开式(5)只包含正数幂, 而 $f_i(z)$ 在 c_k 处至多具有一寻常代数奇点.

现在我们研究 $a_0(c_k)=0$ 的情形. 设零点的重数为 m, 那么 $\lim\limits_{z \to c_k} a_0(z)(z-c_k)^{-m} \neq 0$. 从(6)可得

$$a_0(z)(z-c_k)^{-m}+a_1(z)(z-c_k)^{-m} f_i(z)^{-1}+\cdots$$
$$+a_n(z)(z-c_k)^{-m} f_i(z)^{-n}=0.$$

如果表达式 $f_i(z)(z-c_k)^m$ 无界, 则仍将引出矛盾. 象在 1.7 节中一样, 令

$$F(\zeta)=\sum_{-\infty}^{\infty} A_\nu \zeta^\nu,$$

并知 $F(\zeta) \zeta^{mh}$ 是有界的. 因此, $F(\zeta)$ 具有一至多为 mh 阶的极点; 而 $f_i(z)$ 在 c_k 处至多具有一代数极点, 或者在特殊情形下, 具有一寻常代数奇点.

最后, $z=\infty$ 上的性态也有必要讨论一下. 很容易看出, 形如下式的展开式:

$$f_i(z)=\sum_{-\infty}^{\infty} A_\nu z^{\nu/h}$$

在 ∞ 的一个邻域内成立. 设多项式 $a_i(z)$ 的次数为 r_i (恒等于零

的系数不在讨论之内）. 取一整数 m，使得

$$m>\frac{1}{k}(r_k-r_0), \quad k=1, \cdots, n. \tag{7}$$

可以断言，当 $z\to\infty$ 时，$f_i(z)z^{-m}$ 必有界．因为否则，对于一个趋于 ∞ 的序列，将有 $f_i(z)^{-1}z^m\to 0$．这意味着 $f_i(z)^{-k}z^{mk}\to 0$，而根据(7)，对于 $k\geqslant 1$，将有 $f_i(z)^{-k}z^{r_k-r_0}\to 0$．如以 z^{-r_0} 乘(6)式，则所有的项除首项外都将趋于零．这是一个矛盾，因此知 $f_i(z)$ 在 ∞ 处至多具有一代数极点．

总结上面所说，我们已证明了一个代数函数在扩充平面上至多具有代数奇点．现在我们来证明这一叙述的逆．为了建立一逆定理，主要的是要加上一种假设，使得在一给定点上只有有穷个分支．

设 $\mathbf{f}$ 为一整体解析函数．对于每一个 c，设有一个以 c 为圆心的有孔圆盘 Δ 存在，使得 $\mathbf{f}$ 的定义于一点 $z_0\in\Delta$ 的所有芽都能沿着 Δ 内任一弧延拓，并在 c 处具有代数的特征．这一假设对 $c=\infty$ 也适合，此时 Δ 是一圆的外部．此外，对于一 Δ，必须假设 z_0 处的不同芽的个数是有限的．

由于扩充平面可用有穷个圆盘 Δ 来遮盖（圆心也包括在内），因此只有有穷个点 c 可以是实际的奇点；把这些点记为 c_k．容易证明在任一点 $z\neq c_k$ 处的芽的个数是一常数．因为每一个这样的点具有一邻域，在其中 $\mathbf{f}$ 的所有芽都是单值的，而且可在整个邻域内延拓．由此可知，恰具有 n 个芽的点 z 的集合是开集（n 可为有穷或无穷）．由于扩充平面减去点 c_k 后是连通的，因此这些集合中只有一个是不空的．因此 n 是一常数．由假设知这一常数不能为无穷大，同时它也不能等于零，因为如果它等于零，则 $\mathbf{f}$ 就成为空的函数元素集合了．

现在我们可把任一点 $z\neq c_k$ 上的分支记为 $f_1(z), \cdots, f_n(z)$，但次序仍是未定的．作 $f_i(z)$ 的各个初等对称函数，也就是说，作出多项式

$$(w-f_1(z))(w-f_2(z))\cdots(w-f_n(z))$$

的系数. 这些系数都是 z 的单值函数, 而且显然在除了可能的孤立奇点 c_k 以外, 到处是解析的. 当 z 趋于 c_k 时, 每一 $f_i(z)$ 至多象 $|z-c_k|$ 的负数次乘幂一样, 向无穷大增大. 因此, 初等对称函数也具有这样的性质. 由是可知所有的孤立奇点, 包括无穷远处的一点在内, 至多不过是些极点, 所以初等对称函数必都是 z 的有理函数. 设它们的公分母为 $a_0(z)$, 则所有分支 $f_i(z)$ 必满足一多项式方程

$$a_0(z)w^n+a_1(z)w^{n-1}+\cdots+a_n(z)=0,$$

这就证明了 $\mathbf{f}$ 是代数函数.

现在就很容易解决 2.2 节中还没有解决的问题. 设函数元素 (f, Ω) 满足方程 $P(f(z), z)=0$, 此处 P 是不可约的, 关于 w 的次数是 n. 则对应的整体解析函数 $\mathbf{f}$ 只具有代数奇点及有穷个分支. 根据上面的证明, $\mathbf{f}$ 应满足一多项式方程, 其次数等于分支个数. 因此它将满足一个次数不能较高于 n 的既约方程. 但它所能满足的唯一既约方程为 $P(w, z)=0$, 它的次数是 n. 所以分支个数恰为 n, 这就证明了 $P(w, z)=0$ 的所有解都是同一解析函数的分支.

总结上述结果, 可得:

定理 4 一个解析函数如果具有有穷个分支, 并至多具有一些代数奇点, 则它是一代数函数. 每一代数函数 $w=\mathbf{f}(z)$ 满足一既约方程 $P(w, z)=0$, 除了一常数因子外, 这一方程是唯一地确定的, 而每一个这样的方程唯一地确定一对应的代数函数.

通常我们也这样说: 一个既约方程 $P(w, z)=0$ 定义一代数曲线. 代数曲线的理论是代数学和函数论中一高度发展的分枝. 我们只能在这里提一提函数论方面的最初等部分.

习　题

试确定代数函数 $w^3-3wz+2z^3=0$ 的奇点的位置和本质.

3 Picard定 理

在这一节中我们要证明 Picard 的著名定理，它断言，一个整函数遗漏的至多是一个有穷值. 我们将按本质的途径，使用模函数 $\lambda(\tau)$（第 7 章第 3.4 与 3.5 节）作为单值性定理(第 1.6 节）的一个应用来证明这定理. 这是 Picard 自己的证明. 现在已有很多其他的证明，它们只需要较少的准备，因而可说是更为初等的，但没有一个证明象原证明那样深刻透彻.

3.1 空隙值

复数 a 称为函数 $f(z)$ 的一个空隙值，如果在 f 有定义的区域中 $f(z)\neq a$. 例如，0 是 e^z 在整个平面中的一个空隙值.

定理 5（Picard） 具有不止一个空隙值的整函数必化为一个常数.

我们记得，一个整函数就是在整个平面中都解析的函数. 如果 a 与 b 是不同的有穷值，并设 $f(z)$ 对所有的 z 都不等于 a 与 b，我们要证明 $f(z)$ 是一个常数. 考察 $f_1(z)=(f(z)-a)/(b-a)$. 这一函数是一个整函数且 $\neq 0$ 与 1. 如果 f_1 是常数，那么 f 也是. 所以我们完全可以从一开始就假设 $a=0$, $b=1$.

我们将定义一个整体解析函数 $\mathbf{h}$，它的函数元素 (h, Ω) 具有下列性质：对于 $z\in\Omega$, $\operatorname{Im} h(z)>0$, $\lambda[h(z)]=f(z)$. 这里 $\lambda(\tau)$ 是第 7 章第 3.5 节定义的模函数. 我们要证明 $\mathbf{h}$ 可以沿所有路线延拓. 由于平面是单连通的，故由单值性定理知，$\mathbf{h}$ 定义一整函数 $h(z)$. 由于 $h(z)$ 的所有值都在上半平面内，所以 e^{ih} 是有界的. 根据 Liouville 定理，h 必须化为常数，因而 $f(z)=\lambda[h(z)]$ 也是常数.

由第 7 章的定理 7，在上半平面内存在一点 τ_0 使得 $\lambda(\tau_0)=f(0)$. 由于 $\lambda'(\tau)\neq 0$，由同一定理，存在 λ 的一个局部逆，定义在 $f(0)$ 的一个邻域 Δ_0 中，记为 λ_0^{-1}，以下列条件为标志：在 Δ_0 中

$\lambda[\lambda_0^{-1}(w)]=w$, 且

$$\lambda_0^{-1}[f(0)]=\tau_0.$$

根据连续性，有原点的一个邻域 Ω_0，在其中 $f(z)\in\varDelta_0$，因而可以在 Ω_0 定义 $h(z)=\lambda_0^{-1}[f(z)]$. 以 $\mathbf{h}$ 表示将函数元素 (h, Ω_0) 按一切可能途径延拓而得到的整体解析函数.

现在必须证明元素 (h, Ω_0) 可以沿所有路线延拓，而且 $\operatorname{Im} h$ 保持为正. 如果情况不是这样，我们可以找到一条路线 $\gamma[0, t_1]$，使得对任何 $t<t_1$，h 可以延拓，而且 $\operatorname{Im} h$ 一直保持为正，然而，在 $t\to t_1$ 时，或者 h 不能延拓，或者 $\operatorname{Im} h[\gamma(t)]$ 趋于 0. 我们在上半平面可以确定一个值 τ_1，适合 $\lambda(\tau_1)=f[\gamma(t_1)]$，和一个局部逆 λ_1^{-1}，它定义在 $f[\gamma(t)]$ 的一个邻域 $\varDelta_1$ 中，使 $\lambda_1^{-1}(f[\gamma(t)])=\tau_1$. 令 Ω_1 是 $\gamma(t_1)$ 的一个邻域，在其中 $f(z)\in\varDelta_1$，并选 $t_2<t_1$ 使得对于 $t\in[t_2, t_1]$，有 $\gamma(t)\in\Omega_1$. 我们知道 $\lambda(\tau)$ 在 $\tau=h[\gamma(t_2)]$ 与 $\tau=\lambda_1^{-1}(f[\gamma(t_2)])$ 有相同的值 $f[\gamma(t_2)]$. 因此，由第 7 章定理 8，在同余子群 mod 2 中存在一个模变换 S，使得

$$S[\lambda_1^{-1}(f[\gamma(t_2)])]=h[\gamma(t_2)].$$

现在用 $h_1(z)=S[\lambda_1^{-1}(f(z))]$ 在 Ω_1 中定义 h_1. 显见 (h_1, Ω_1) 是 $\mathbf{h}$ 在 t_1 时的一个延拓，它满足 $\lambda(h_1(z))=f(z)$ 和 $\operatorname{Im} h_1>0$. 我们得出结论：$\mathbf{h}$ 确实可以沿所有路线延拓，由此，正如我们已指出的，立即得到 Picard 定理.

我们如此费力地作出了证明的细节，无非是要读者相信，单值性定理在证明中起着和模函数同样本质的作用.

4 线性微分方程

整体解析函数的理论可用以研究常微分方程的复数解，而且具有相当高的一般性. 在所有微分方程中，线性方程是最简单而最重要的. n 阶线性方程具有下列形式：

$$a_0(z)\frac{d^n w}{dz^n}+a_1(z)\frac{d^{n-1}w}{dz^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(z)\frac{dw}{dz}+a_n(z)w=b(z). \quad (8)$$

式中系数 $a_k(z)$ 及右边的 $b(z)$ 都是单值解析函数. 为了处理简单起见，我们只限于讨论这些函数定义于整个平面的情形；也就是说，假定它们都是整函数. 方程(8)的一个解是一整体解析函数 $\mathbf{f}$，满足恒等式

$$a_0\mathbf{f}^{(n)}+a_1\mathbf{f}^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}\mathbf{f}'+a_n\mathbf{f}=b. \tag{9}$$

我们已经说明，这是一个有意义的方程，而且只要 $\mathbf{f}$ 的函数元素(f, Ω)满足以 f 代 $\mathbf{f}$ 而得的对应方程，则 (9) 式必成立. 具有这一性质的函数元素称为局部解.

熟悉实数情形的读者将希望方程(9)有 n 个线性独立的解. 在我们只研究局部解的时候情形确实如此，但现在我们须要求出不同的各个局部解，它们可以是同一个整体解析函数的不同元素. 换言之，在复数的情形，问题的一部分是找出各局部解互为解析延拓的情况.

方程(8)称为齐次方程，如果 $b(z)$ 恒等于零. 这是非常重要的一种情形，也是我们这里所要讨论的唯一情形. 我们还可以假设系数 $a_k(z)$不具有公共零点；事实上，如 z_0 是一个公共零点，则所有系数可以除以 $z-z_0$，而解保持不变. 如我们所要研究的是系数为半纯函数的方程，则从一开始便可以 $a_0(z)$遍除(8)式. 反之，如所给方程具有半纯的系数，则每一系数可写成二整函数之商；乘上公分母以后即得一与整系数方程等价的方程. 因此，方程的系数是否有极点，就无关重要.

如 $n=1$，则方程(8)具有显解

$$w=e^{-\int\frac{a_1(z)}{a_0(z)}dz}.$$

这样，问题只在于确定积分的多值性，这是前面已经讨论过的问题. 而在 $n=2$ 时，则却具有一般情形的特性. 据此，我们只要讨论二阶线性齐次微分方程就够了.

4.1 寻常点

一点 z_0 称为微分方程

$$a_0(z)w''+a_1(z)w'+a_2(z)w=0 \tag{10}$$

的寻常点，当且仅当 $a_0(z_0)\neq 0$. 这里须要证明的主要定理是下面的

定理 6 如果 z_0 是方程(10)的一寻常点，则必存在一局部解 (f, Ω), $z_0\in\Omega$, 具有任意的初始值 $f(z_0)=b_0$ 及 $f'(z_0)=b_1$. 芽 (f, z_0)是唯一确定的.

先将(10)写成如下形式:

$$w''=p(z)w'+q(z)w, \tag{11}$$

此处 $p(z)=-a_1/a_0$; $q(z)=-a_2/a_0$. 定理的假设表明, $p(z)$ 及 $q(z)$在 z_0 的一个邻域内解析; 为了方便起见, 可取 $z_0=0$. 令 $p(z)$ 及 $q(z)$的 Taylor 展开为

$$\begin{aligned} p(z)&=p_0+p_1z+\cdots+p_nz^n+\cdots, \\ q(z)&=q_0+q_1z+\cdots+q_nz^n+\cdots. \end{aligned} \tag{12}$$

为了解出方程 (11), 可用未定系数法. 如定理正确, 则方程的解 $w=f(z)$必有 Taylor 展开

$$f(z)=b_0+b_1z+\cdots+b_nz^n+\cdots, \tag{13}$$

其系数满足条件:

$$\begin{aligned} &2b_2=b_1p_0+b_0q_0, \\ &6b_3=2b_2p_0+b_1p_1+b_1q_0+b_0q_1, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &n(n-1)b_n=(n-1)b_{n-1}p_0+(n-2)b_{n-2}p_1+\cdots \\ &\qquad\qquad +b_1p_{n-2}+b_{n-2}q_0+b_{n-3}q_1+\cdots+b_0q_{n-2}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{14}$$

这就证明了唯一性. 余下的就是要证明等式(14)可引出具有正的收敛半径的幂级数(13). 于是, 通过容许的各项运算如逐项微分、相乘、重行排列等就可知(13)是方程的一个解, 具有所需的初始值 f 及 f'.

由于级数(12)具有正的收敛半径, 故根据 Cauchy 不等式, 存在常数 M_0 及 $r_0>0$, 使得

$$\begin{aligned} |p_n|&\leqslant M_0r_0^{-n}, \\ |q_n|&\leqslant M_0r_0^{-n}. \end{aligned} \tag{15}$$

为了证明(13)也具有一正的收敛半径，我们只要证明，在 M 及 r 的适当选择下，成立类似不等式

$$|b_n| \leqslant Mr^{-n} \tag{16}$$

即可.

现在对 n 用归纳法来证明(16). 首先，(16)对 $n=0$ 及 $n=1$ 必成立；据此得到条件 $|b_0| \leqslant M$, $|b_1| \leqslant Mr^{-1}$. 这些条件对于足够大的 M 及充分小的 r 成立. 设(16)对所有小于 n 的下标正确. 为了简化计算手续，令 $r<r_0$; 则从一般方程(14)立即可得估值:

$$n(n-1)|b_n| \leqslant MM_0[(1+2+\cdots+(n-1))r^{1-n}+(n-1)r^{2-n}]$$
$$=MM_0\left[\frac{n(n-1)}{2}r+(n-1)r^2\right]r^{-n}.$$

于是得 $\quad |b_n| \leqslant MM_0\left(\frac{r}{2}+\frac{r^2}{n}\right)r^{-n} \leqslant MM_0\left(\frac{r}{2}+r^2\right)r^{-n}$,

只要 $M_0(r/2+r^2) \leqslant 1$, 即得(16). 容易看出，这一关系以及前面的一些条件对所有充分小的 r 都能得到满足. 定理证毕.

特别是，存在局部解 $f_0(z)$ 及 $f_1(z)$，满足条件: $f_0(z_0)=1$, $f_0'(z_0)=0$, $f_1(z_0)=0$, $f_1'(z_0)=1$. 由于唯一性，故知具有初始值 b_0, b_1 的解必为 $f(z)=b_0f_0(z)+b_1f_1(z)$. 因此，每一局部解必为 $f_0(z)$ 及 $f_1(z)$ 的一个线性组合. 而且解 $f_0(z)$ 及 $f_1(z)$ 是线性无关的，这是因为如果 $b_0f_0(z)+b_1f_1(z)=0$, 则令 $z=z_0$ 可得 $b_0=0$, 而由于 $f_1(z)$ 不能恒等于零，故必 $b_1=0$.

习 题

1. 求 $w''=zw$ 的两个线性独立解在原点附近的幂级数展开式.

2. Hermite 多项式定义为 $H_n(z)=(-1)^n e^{z^2}(d^n/dz^n)(e^{-z^2})$. 求证 $H_n(z)$ 是方程 $w''-2zw'+2nw=0$ 的一个解.

4.2 正则奇点

使 $a_0(z_0)=0$ 的任一点 z_0 称为方程(10)的奇点. 如方程写成(11)的形式，则这一假设就表示 $p(z)$ 或 $q(z)$ 在 z_0 处具有一极点,

因为我们仍设(10)中的所有系数不具有公共零点.

奇点有各种不同的类型. 现在先研究最简单的情形，设 $a_0(z)$ 具有一单零点. 在这一假设下，函数 $p(z)$ 及 $q(z)$ 至多不过有单极点，如取 $z_0=0$，则它们的 Laurent 展开具有下列形式:

$$p(z)=\frac{p_{-1}}{z}+p_0+p_1z+\cdots,$$

$$q(z)=\frac{q_{-1}}{z}+q_0+q_1z+\cdots.$$

如在(11)式中，作代换

$$w=b_0+b_1z+b_2z^2+\cdots,$$

比较系数后可得

$$\begin{aligned}
&-p_{-1}b_1=b_0q_1,\\
&2(1-p_{-1})b_2=b_1p_0+b_1q_{-1}+b_0q_0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&n(n-1-p_{-1})b_n=(n-1)b_{n-1}p_0+(n-2)b_{n-2}p_1+\cdots\\
&\quad+b_1p_{n-2}+b_{n-1}q_{-1}+b_{n-2}q_0+\cdots+b_0q_{n-2},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}\tag{17}$$

这一组关系式与(14)有着本质上的区别. 首先，只有 b_0 可任意选择，因此，用这一方法至多可得一个线性独立解. 其次，如 $p_{-1}=0$ 或等于一正整数，则方程组 (17) 或者没有解，或者 b_n 之一可任意选择.

设 p_{-1} 不等于零或正整数，我们来证明，所得幂级数能有一正的收敛半径. 仍象前面一样，应用估值 (15)，令 $M\geqslant|b_0|$，并设(16)对小于 n 的下标成立. 更设 $r\leqslant r_0$，则得

$$\begin{aligned}
&n|n-1-p_{-1}|\cdot|b_n|\\
&\quad\leqslant Mr^{-n}\left\{M_0\left[\frac{n(n-1)}{2}r+(n-1)r^2\right]+|q_{-1}|r\right\}.
\end{aligned}$$

只要$(n-1)/|n-1-p_{-1}|$ 有界，则对于所有的 n，下列不等式成立:

$$|b_n|\leqslant Mr^{-n}(Ar+Br^2).$$

对于足够小的 r，这一式较强于(16)式，从此，收敛性得证.

正象上面所指出的，这一结果是属于预备性质的．我们的实际目的是要在 z_0 点处有一正则奇点的情况下解出方程(11)．所谓正则奇点就是指 $p(z)$ 在 z_0 处至多具有一单极点，而 $q(z)$ 在 z_0 处至多具有一二阶极点．

在这种情况下，解的形式应为 $w=z^{\alpha}g(z)$，此处 $g(z)$ 在点 $z_0(=0)$ 解析而且 $\neq 0$．将这一解代入(11)，经运算后可知，$g(z)$ 必满足如下的微分方程：

$$g''=\left(p-\frac{2\alpha}{z}\right)g'+\left(q+\frac{\alpha p}{z}-\frac{\alpha(\alpha-1)}{z^2}\right)g. \qquad (18)$$

对于任意的 α，这一式与原来方程同型，因此不能有什么帮助．但是我们可以选择 α，使 g 的系数只具有单极点．如果 $q(z)$ 具有展开式

$$q(z)=\frac{q_{-2}}{z^2}+\cdots,$$

则 α 应满足二次方程

$$\alpha(\alpha-1)-p_{-1}\alpha-q_{-2}=0, \qquad (19)$$

这一方程称为指数方程(indicial equation)．对于这样的 α，由上面预备性的结果可知 (11) 具有形如 $z^{\alpha}g(z)$，$g(0)\neq 0$ 的解，只要 $p_1-2\alpha$ 不为非负整数．

设(19)的根为 α_1 及 α_2．则 $\alpha_1+\alpha_2=p_{-1}+1$ 或 $\alpha_2-\alpha_1=p_{-1}-2\alpha_1+1$．因此当且仅当 $\alpha_2-\alpha_1$ 等于一正整数时 α_1 是例外值；根据对称性，当 $\alpha_2-\alpha_1$ 是一负整数时，α_2 是例外值．所以如果指数方程的两根不差一整数，则可得两个解 $z^{\alpha_1}g_1(z)$ 及 $z^{\alpha_2}g_2(z)$，它们显然是线性独立的．如两根相等或相差一整数，则只得一个解．

定理 7 如 z_0 为方程(10)的一正则奇点，则对应于指数方程的两个根 α_1，α_2，只要 $\alpha_2-\alpha_1$ 不等于一整数，方程(10)就有两个线性独立的解，其形式为 $(z-z_0)^{\alpha_1}g_1(z)$ 及 $(z-z_0)^{\alpha_2}g_2(z)$，且 $g_1(0)$、$g_2(0)\neq 0$．如 $\alpha_2-\alpha_1$ 为 $\geqslant 0$ 的整数，则方程只有一个对应于指数方程的根 α_2 的解．

如已知一解，则与这一解线性无关的另一解就不难求出．求第

二解的方法属于微分方程的专著的范围，这里就不多述了．至于非正则奇点的情形，在本书中也无法讨论．

习 题

1．求证：方程$(1-z^2)w''-2zw'+n(n+1)w=0$（$n$为一非负整数）的解为Legendre多项式

$$P_n(z)=\left(\frac{1}{2^n n!}\right)\frac{d^n}{dz^n}(z^2-1)^n.$$

2．试确定方程

$$z^2(z+1)w''-z^2w'+w=0$$

的两个线性独立解，其一近0，其另一近-1.

3．求证Bessel方程$zw''+w'+zw=0$的解是一整函数，并确定其幂级数展开．

4.3 无穷远点附近的解

如$a_0(z)$，$a_1(z)$，$a_2(z)$都是多项式，我们来研究解在∞的邻域中的性态．处理这一问题的最简便方法是作变数变换$z=1/Z$．由于

$$\frac{dw}{dz}=-Z^2\frac{dw}{dZ},$$

$$\frac{d^2w}{dz^2}=2Z^3\frac{dw}{dZ}+Z^4\frac{d^2w}{dZ^2},$$

因此，方程(11)变为

$$\frac{d^2w}{dZ^2}=-\left(2Z^{-1}+Z^{-2}p\left(\frac{1}{Z}\right)\right)\frac{dw}{dZ}+Z^{-4}q\left(\frac{1}{Z}\right)w. \qquad (20)$$

如果点$Z=0$是方程(20)的一寻常点或正则奇点，则点∞将是方程(11)的一个寻常点或正则奇点．因此，如果方程(11)中的各系数在$Z=0$处有一可去奇点，则点∞就是一寻常点；而根据定义，这就等于说$-(2z+z^2p(z))$及$z^4q(z)$在∞有可去奇点．同样，如果这些函数分别在∞至多有一单极点及二阶极点，则∞是一正则奇点．

现在来确定具有极少数奇点的方程．如 ∞ 为一寻常点，则 $q(z)$ 至少应具有四个极点，除非 $q(z)\equiv 0$．在后一情形，$p(z)$ 只能有一极点，如以这一极点置于原点，则必有 $p(z)=-2/z$．对应方程

$$\frac{d^2w}{dz^2}=-\frac{2}{z}\frac{dw}{dz}$$

的通解为 $w=az^{-1}+b$．

如 $q(z)$ 不恒等于零，则只能有两正则奇点．显然我们可将这两奇点置于 0 及 ∞，这样，即得 ∞ 是正则奇点的情形．如果只有一有限奇点，设这一奇点在原点，则必有 $p(z)=A/z$，$q(z)=B/z^2$．如另选一些常数，则方程可写成

$$z^2w''-(\alpha+\beta-1)zw'+\alpha\beta w=0. \tag{21}$$

这一方程有解 $w=z^{\alpha}$，$w=z^{\beta}$，此处 α 及 β 显然是指数方程的两根．如 $\alpha=\beta$，则必尚有另一解．为了求出这一解，可将 (21) 式写成符号形式

$$\left(z\frac{d}{dz}-\alpha\right)^2 w=0,$$

并以 $w=z^{\alpha}W$ 代入，得

$$\left(z\frac{d}{dz}-\alpha\right)z^{\alpha}W=z^{\alpha}\cdot z\frac{dW}{dz},$$

$$\left(z\frac{d}{dz}-\alpha\right)^2 z^{\alpha}W=z^{\alpha}\cdot z\frac{d}{dz}\left(z\frac{dW}{dz}\right).$$

方程 $\left(z\frac{d}{dz}\right)^2 W=0$ 显然有解 $W=\log z$，因此，(21) 式的所求解为 $w=z^{\alpha}\log z$．

4.4 超比微分方程

上面说明具有一个或两个正则奇点的微分方程具有平凡解．只有在引入第三个奇点时可得一新的重要的解析函数类．

很明显，二阶线性微分方程经变数的线性变换后变成同一类型的方程，其奇点的特征仍保持不变．因此，我们可以把方程的三

个奇点选择在预定的一些点上，而最简单的就是选定在 0, 1 及 ∞ 上.

如方程 $$w''=p(z)w'+q(z)$$
只在 0 及 1 处具有有限正则奇点，则必有

$$p(z)=\frac{A}{z}+\frac{B}{z-1}+P(z),$$

$$q(z)=\frac{C}{z^2}+\frac{D}{z}+\frac{E}{(z-1)^2}+\frac{F}{z-1}+Q(z),$$

此处 $P(z)$ 及 $Q(z)$ 都是多项式. 为了使 ∞ 处的奇点是正则奇点，在 ∞ 处，$2z+z^2p(z)$ 必须至多具有一单极点而 $z^4q(z)$ 至多具有一二阶极点. 根据这些条件，$P(z)$ 及 $Q(z)$ 就必须恒等于零，而关系 $D+F=0$ 必成立. 这些条件显然是唯有的条件，因此可把 $p(z)$、$q(z)$ 的表达式重写成如下形式：

$$p(z)=\frac{A}{z}+\frac{B}{z-1},$$

$$q(z)=\frac{C}{z^2}-\frac{D}{z(z-1)}+\frac{E}{(z-1)^2}.$$

原点的指数方程为

$$\alpha(\alpha-1)=A\alpha+C.$$

因此，如这一方程的根为 α_1, α_2, 则得 $A=\alpha_1+\alpha_2-1$, $C=-\alpha_1\alpha_2$. 同理，$B=\beta_1+\beta_2-1$, $E=-\beta_1\beta_2$, 此处 β_1 及 β_2 是点 1 的指数方程的两根. 为了列出 ∞ 处的指数方程，注意，$-(2z+z^2p(z))$ 及 $z^4q(z)$ 的首项系数分别为 $-(2+A+B)$ 及 $C-D+E$. 因此 ∞ 处指数方程的根 γ_1, γ_2 满足关系 $\gamma_1+\gamma_2=-A-B-1$ 及 $\gamma_1\gamma_2=-C+D-E$. 从此得到关系

$$\alpha_1+\alpha_2+\beta_1+\beta_2+\gamma_1+\gamma_2=1, \tag{22}$$

于是方程可写成如下形式：

$$w''+\left(\frac{1-\alpha_1-\alpha_2}{z}+\frac{1-\beta_1-\beta_2}{z-1}\right)w'$$
$$+\left(\frac{\alpha_1\alpha_2}{z^2}-\frac{\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2-\gamma_1\gamma_2}{z(z-1)}+\frac{\beta_1\beta_2}{(z-1)^2}\right)w=0. \tag{23}$$

为了避免例外的情形，可设差 $\alpha_2-\alpha_1$, $\beta_2-\beta_1$, $\gamma_2-\gamma_1$ 中没有

一个是整数．我们的下一步就是要简化方程(23)．在 4.2 节中我们已经证明，对于 $g(z)$ 来说，代换 $w=z^{\alpha}g(z)$ 确定了一个类似的微分方程，那就是方程(18)．由于原来的方程具有形如 $w=z^{\alpha_1}g_1(z)$，$w=z^{\alpha_2}g_2(z)$ 的解，故知变换而成的方程 (18) 必有形如 $g(z)=z^{\alpha_1-\alpha}g_1(z)$ 及 $g(z)=z^{\alpha_2-\alpha}g_2(z)$ 的解．因此 (18) 的指数方程应有根 $\alpha_1-\alpha$, $\alpha_2-\alpha$, 这也可直接从计算中得证．同时，对应于 ∞ 处奇点的根从 γ_1, γ_2 变至 $\gamma_1+\alpha$, $\gamma_2+\alpha$. 应用同样方法可析出一因子 $(z-1)^{\beta}$, 并知所得方程的指数在 1 处者应减少 β, 而在 ∞ 处者应增大 β. 自然的选择是令 $\alpha=\alpha_1$, $\beta=\beta_1$. 因此最后方程的六个指数分别为 0, $\alpha_2-\alpha_1$, 0, $\beta_2-\beta_1$, $\gamma_1+\alpha_1+\beta_1$, $\gamma_2+\alpha_1+\beta_1$. 为了符合于延用已久的约定起见，可令 $a=\alpha_1+\beta_1+\gamma_1$, $b=\alpha_1+\beta_1+\gamma_2$, $c=1+\alpha_1-\alpha_2$. 由关系(22)得 $c-a-b=\beta_2-\beta_1$. 因此，新的微分方程变为

$$w''+\left(\frac{c}{z}+\frac{1-c+a+b}{z-1}\right)w'+\frac{ab}{z(z-1)}\,w=0,$$

或者，经简化后，得

$$z(1-z)w''+[c-(a+b+1)z]w'-abw=0. \tag{24}$$

这一方程称为**超比微分方程**，上面已经证明，方程(23)的解就等于(24)的解乘以 $z^{\alpha_1}(z-1)^{\beta_1}$. 这里，我们假设了指数差 $c-1$, $a-b$, $a+b-c$ 不为整数．

可以证明，方程(24)具有一个形如 $w=\sum_{n=0}^{\infty}A_nz^n$ 的解．如果将这一幂级数代入 (24)，通过简单计算可知方程的系数应满足下列递推关系：

$$(n+1)(n+c)A_{n+1}=(n+a)(n+b)A_n.$$

这一关系的形式非常简单，因此可用以列出解的显式．取 $A_0=1$，则超比方程必为下列函数所满足，即

$$F(a,\ b,\ c,\ z)=1+\frac{a\cdot b}{1\cdot c}z+\frac{a(a+1)\cdot b(b+1)}{1\cdot 2\cdot c(c+1)}z^2+\frac{a(a+1)(a+2)\cdot b(b+1)(b+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot c(c+1)(c+2)}z^3+\cdots,$$

这一函数称为超比函数，只要 c 不等于零或负整数，它都有定义.

超比级数的收敛半径不难用计算求出，但用纯理论来说明更为有益. 首先，我们知道 $F(a, b, c, z)$ 可以沿着任何一条不通过点1而不回至原点的路径解析延拓. 因此，在单位圆盘 $|z|<1$ 内就可以定义 $F(a, b, c, z)$ 的一个单值分支(因为这一圆盘是单连通的)，故知其收敛半径至少应等于1. 如果其收敛半径大于1，则 $F(a, b, c, z)$ 将是一整函数. 在 ∞ 附近，它必是已知存在于 ∞ 邻域中的解 $z^{-a}g_1(z)$, $z^{-b}g_2(z)$ 的一线性组合. 但这一线性组合仅当 a 或 b 是一整数时可为单值. 如设 a 是整数而 b 是非整数，则 $F(a, b, c, z)$ 必为 $z^{-a}g_1(z)$ 的一个倍数. 根据 Liouville 定理，如 a 为正数，则 $F(a, b, c, z)$ 将恒等于零，但情形并不如此. 由此可知，收敛半径仅当 a(或 b) 是一负整数或零的时候成为无限，此时超比级数转化成一多项式.

在原点的一个邻域中，也有一个形如 $z^{1-c}g(z)$ 的解. 此处 $g(z)$ 满足一超比微分方程，它具有六个指数，分别为 $\alpha_2-\alpha_1$, 0, 0, $\beta_2-\beta_1$, $\gamma_1+\alpha_2+\beta_1$, $\gamma_2+\alpha_2+\beta_1$. 因此可令 $g(z)=F(1+a-c, 1+b-c, 2-c, z)$. 这就证明了，原点附近的两个线性独立解分别为 $F(a, b, c, z)$ 及 $z^{1-c}F(1+a-c, 1+b-c, 2-c, z)$.

在点1附近的解可按完全同样的方法确定. 不过，以 $1-z$ 代 并互调各个 α 及 β 来求更为容易. 结果得到1的邻域中的两个线性独立解为 $F(a, b, 1+a+b-c, 1-z)$ 及 $(1-z)^{c-a-b}F(c-b, c-a, 1-a-b+c, 1-z)$. 至于在 ∞ 附近的解也可用同法求得.

上面说明了具有三个奇点的最一般的二阶线性微分方程可用超比函数求得解的显式. 当然也可以确定解的完全多值结构，但较为复杂.

习　　题

1. 求证

$$(1-z)^{-\alpha}=F(\alpha, \beta, \beta, z), \quad \log 1/(1-z)=zF(1, 1, 2, z).$$

2. 试求 $F(a, b, c, z)$的导数，仍表为超比函数.

3. 试导出下面的积分表示式：

$$F(a, b, c, z)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-zt)^{-a}dt.$$

4. 如 w_1 及 w_2 是微分方程 $w''=pw'+qw$ 的两个线性独立解，求证商 $\eta=w_2/w_1$ 满足方程

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{\eta''}{\eta'}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{\eta''}{\eta'}\right)^2=-2q-\frac{1}{2}p^2+p'.$$

4.5 Riemann 的观点

Riemann 首先有力地提出了下面的观点，那就是：一个解析函数完全可以用它的奇点及一般性质来定义，正象它可用显表达式来定义一样，而且前者可能比后者更好. 一个最普通的例子就是一有理函数可用与它的极点有关的奇部来确定.

下面我们将根据 Riemann 的论据，证明超比微分方程的解可用这一性质来标志. 考察函数元素(f, Ω)的一个集合 $\mathbf{F}$，具有如下特性：

1. 集合 $\mathbf{F}$ 称为是完全的，如果它包含任一$(f, \Omega)\in\mathbf{F}$ 的所有解析延拓，这里并不要求 $\mathbf{F}$ 中的任两个函数元素互为解析延拓，因此，$\mathbf{F}$ 可以由若干个整体解析函数组成.

2. 集合是线性的，意即对于所有常数 c_1 及 c_2，$(f_1, \Omega)\in\mathbf{F}$ 及$(f_2, \Omega)\in\mathbf{F}$ 蕴涵$(c_1f_1+c_2f_2, \Omega)\in\mathbf{F}$. 而且，具有同一 Ω 的任意三元素(f_1, Ω)、(f_2, Ω)、$(f_3, \Omega)\in\mathbf{F}$ 在 Ω 内满足恒等关系 $c_1f_1+c_2f_2+c_3f_3=0$，这一关系中的系数都是不全等于零的常数. 换言之，$\mathbf{F}$ 至多是二维的.

3. $\mathbf{F}$ 中的函数的唯有的有限奇点应在点 0 及 1；而且点 ∞ 也作为一奇点. 更精确地说，那就是任一 $(f, \Omega)\in\mathbf{F}$ 必可沿着有限平面上所有不通过点 0 及 1 的弧延拓.

4. 至于奇点上的性态，则设 $\mathbf{F}$ 中有着这样的诸函数存在，它们在 0 附近的性态与已知幂 z^{α_1} 及 z^{α_2} 一样，在 1 附近与$(z-1)^{\beta_1}$ 及 $(z-1)^{\beta_2}$ 一样，在 ∞ 附近与 $z^{-\gamma_1}$ 及 $z^{-\gamma_2}$ 一样. 严格地说，就是存

在某些解析函数 $g_1(z)$ 及 $g_2(z)$，定义于 0 的邻域 Δ 内，且在该点不等于零；对于 Δ 的一个不包含原点的单连通子域 Ω，可以定义函数元素 $(z^{\alpha_1}g_1(z),\ \Omega)$，$(z^{\alpha_2}g_2(z),\ \Omega)$，而且它们必须都属于 $\mathbf{F}$. 对于点 1 及 ∞，可同样地立出相应的假设.

不难看出，微分方程(23)的解在差 $\alpha_2-\alpha_1$，$\beta_2-\beta_1$，$\gamma_2-\gamma_1$ 不为整数时恰具有这些性质. 此外，还成立关系 $\alpha_1+\alpha_2+\beta_1+\beta_2+\gamma_1+\gamma_2=1$. 作出这些假设，并在这些限制下，可证存在一个而且只有一个集合 $\mathbf{F}$，它具有性质 1～4. 因此，$\mathbf{F}$ 将与微分方程(23)的局部解的集合一致.

Riemann 把 $\mathbf{F}$ 中的任一函数元素用下列记号表示：

$$P\begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1, & z \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \end{Bmatrix}.$$

因此，P 并不代表一个个别的函数，但这一点显然是无关重要的. 在唯一性一经确立之后，只要事先作好适当的解释，形如下面的恒等式显然成立，即

$$P\begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1, & z \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \end{Bmatrix}$$

$$=z^{\alpha}(z-1)^{\beta}P\begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ \alpha_1-\alpha & \beta_1-\beta & \gamma_1+\alpha+\beta, & z \\ \alpha_2-\alpha & \beta_2-\beta & \gamma_2+\alpha+\beta & \end{Bmatrix}$$

或 $$P\begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1, & z \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \end{Bmatrix}=P\begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ \beta_1 & \alpha_1 & \gamma_1, & 1-z \\ \beta_2 & \alpha_2 & \gamma_2 & \end{Bmatrix}.$$

这些关系中有些是非常精致的，很易于辨认，这正是 Riemann 观点的一个特色.

为了证明唯一性，考察两个定义于不包含点 0 或 1 的单连通域 Ω 内的线性无关的函数元素 $(f_1,\ \Omega)$、$(f_2,\ \Omega)\in\mathbf{F}$. 这样的函数

元素在任一 Ω 内是存在的，因为函数 $z^{\alpha_1}g_1(z)$ 及 $z^{\alpha_2}g_2(z)$ 在它们的定义域中是线性无关的；它们可以沿着一段避开 0 与 1 而端点在 Ω 内的弧延拓，从而确定出线性无关的函数元素 (f_1, Ω), (f_2, Ω). 据性质 1，它们属于 $\mathbf{F}$. 如果 (f, Ω) 是 $\mathbf{F}$ 中的第三个函数元素，则恒等式

$$cf+c_1f_1+c_2f_2=0,$$
$$cf'+c_1f_1'+c_2f_2'=0,$$
$$cf''+c_1f_1''+c_2f_2''=0,$$

就意味着

$$\begin{vmatrix} f & f_1 & f_2 \\ f' & f_1' & f_2' \\ f'' & f_1'' & f_2'' \end{vmatrix}=0.$$

将上式写成下列形式：

$$f''=p(z)f'+q(z)f,$$

其中

$$p(z)=\frac{f_1f_2''-f_2f_1''}{f_1f_2'-f_2f_1'}, \quad q(z)=-\frac{f_1'f_2''-f_2'f_1''}{f_1f_2'-f_2f_1'}. \tag{25}$$

此处的分母不恒等于零，因为如果等于零，则 f_1 及 f_2 将是线性相关了.

现在我们可以看到表达式(25)在 f_1 及 f_2 作非退化线性变换，即代之以 $c_{11}f_1+c_{12}f_2$, $c_{21}f_1+c_{22}f_2$, $c_{11}c_{22}-c_{12}c_{21}\neq 0$ 时将保持不变. 这就是说，对于任意的 f_1 及 f_2, $p(z)$ 与 $q(z)$ 将维持原状，因此这两函数在去掉点 0 与 1 的整个平面上是完全确定的单值函数.

为了确定 $p(z)$ 与 $q(z)$ 在原点附近的状态，取 $f_1=z^{\alpha_1}g_1(z)$, $f_2=z^{\alpha_2}g_2(z)$. 通过简单的运算以后可得

$$f_1f_2'-f_2f_1'=(\alpha_2-\alpha_1)\,z^{\alpha_1+\alpha_2-1}(C+\cdots),$$
$$f_1f_2''-f_2f_1''=(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_1+\alpha_2-1)z^{\alpha_1+\alpha_2-2}(C+\cdots),$$
$$f_1'f_2''-f_2'f_1''=\alpha_1\alpha_2(\alpha_2-\alpha_1)z^{\alpha_1+\alpha_2-3}(C+\cdots),$$

式中括号内的 $(C+\cdots)$ 代表一些解析函数，它们在原点具有共同的值 $C=g_1(0)g_2(0)$. 由此可知 $p(z)$ 具有一单极点，其上的留数为 $\alpha_1+\alpha_2-1$, 而 $q(z)$ 的 Laurent 展开则以 $-\alpha_1\alpha_2/z^2$ 为首项. 对于点 1 及 ∞，也成立同样的结果. 从此得到

$$p(z)=\frac{\alpha_1+\alpha_2-1}{z}+\frac{\beta_1+\beta_2-1}{z-1}+p_0(z), \tag{26}$$

此处 $p_0(z)$ 在点 0 及 1 不具有极点．根据定义(25)式可知 $p(z)$ 是一整函数的对数导数．因此，在有限平面上，它只具有单极点，而这些极点上的留数都是正整数．此外，$p(z)$ 在 ∞ 处的展开必须以 $-(\gamma_1+\gamma_2+1)/z$ 为首项．因此 $p(z)$ 只有有穷个极点，这些极点上的留数应加到 $-(\gamma_1+\gamma_2+1)$．根据关系 $(\alpha_1+\alpha_2-1)+(\beta_1+\beta_2-1)=-(\gamma_1+\gamma_2+1)$ 可知，除了在 0 与 1 处的极点之外，不能有其他极点．而由(26)式易见 $p_0(z)$ 不能有极点，因此必恒等于零．

由于 $f_1f_2'-f_2f_1'$ 除了在点 **0** 及 **1** 以外到处都 $\neq 0$，因此 $q(z)$ 必具有如下形式：

$$q(z)=-\frac{\alpha_1\alpha_2}{z^2}-\frac{\beta_1\beta_2}{(z-1)^2}+\frac{A}{z}+\frac{B}{z-1}+q_0(z),$$

其中 $q_0(z)$ 没有有限极点．在 ∞ 处，展开式以项 $-\gamma_1\gamma_2/z^2$ 开始．故知 $q_0(z)$ 必恒等于零，而

$$A=-B=-(\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2-\gamma_1\gamma_2).$$

总结上面的结果，可知 f 必满足下列方程

$$w''+\left(\frac{1-\alpha_1-\alpha_2}{z}+\frac{1-\beta_1-\beta_2}{z-1}\right)w'$$
$$+\left(\frac{\alpha_1\alpha_2}{z^2}-\frac{\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2-\gamma_1\gamma_2}{z(z-1)}+\frac{\gamma_1\gamma_2}{(z-1)^2}\right)w=0.$$

这就是方程(23)式．

由此可知满足性质 1 至 4 的任一集合 $\mathbf{F}$ 必是方程 (23) 的局部解的族 $\mathbf{F}_0$ 的一个子集，这就完成了唯一性的证明．因为对于不包含点 0 或点 1 的任一单连通域 Ω，在 $\mathbf{F}$ 中有两个线性独立的函数元素 (f_1, Ω)，(f_2, Ω)．每一个 $(f, \Omega)\in\mathbf{F}_0$ 具有形式 $(c_1f_1+c_2f_2, \Omega)$，因此必包含于 $\mathbf{F}$ 中．最后，如果 Ω 不是单连通的，则 $(f, \Omega)\in\mathbf{F}_0$ 就是 f 限制在 Ω 的一个单连通子域上所组成的元素的解析延拓，由于这一元素属于 $\mathbf{F}$，故由性质 1 可知 (f, Ω) 也属于 $\mathbf{F}$．

索　引

一 划

二 划

三 划

四 划

五 划

六 划

七 划

九 划

十 划

十一划

十二划

十三划

十四划以上

[General Information]
□□=□□□ □□□
□□=L·V·□□□□
□□=335
SS□=10069517
□□□□=